Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2021-2022
Compléments de calcul intégral et différentiel

CC1 - Sujet A

Exercice 1 On se place sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme $\|.\|$ telle que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

1. Justifier (sans calculs !) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|{}^tH\| \leqslant C\|H\|$.
2. Montrer que l'application
$$\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tMM) \in \mathbb{R}$$
est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa différentielle.
3. Montrer que $M \mapsto D\Phi(M)$ est linéaire.
4. Φ est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 2 On considère l'application
$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x - y^2 + yz, 3y + zy, yz + z) \in \mathbb{R}^3$$

1. Montrer que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^3 \setminus P$, où P est un plan dont on donnera l'équation.
2. En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $(u, v, w) \in B((4, 0, 0), r)$, il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = (u, v, w)$.
3. Donner la jacobienne de f^{-1} en $(4, 0, 0)$.

Exercice 3 On considère le système d'équations
$$(\star) \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2)^2 - x + 2y + z & = 0 \\ \cos(x^2 + z^2) + e^y - 2 & = 0 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un voisinage I de 0 dans $\mathbb{R}$ et une application $\mathscr{C}^1$ $\phi : I \to \mathbb{R}^2$ telle que $\phi(0) = (0, 0)$, et, pour tout $x \in I$, $(x, \phi(x))$ est solution de $(\star)$.
2. Déterminer $\phi'(0)$.