Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2021-2022
Compléments de calcul intégral et différentiel

CC1 - Sujet B

Exercice 1 Dans cet exercice, $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel $\langle .,. \rangle$. On note $\|.\|_2$ la norme associée.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'application linéaire $\|.\|$ induite par $\|.\|_2$.

1. Justifier (sans calculs !) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|{}^tH\| \leqslant C\|H\|$.

2. Soient x_0, y_0 deux vecteurs fixés de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application

$$\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \langle Mx_0, My_0 \rangle \in \mathbb{R}$$

est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et déterminer sa différentielle.

3. Montrer que $M \mapsto D\Phi(M)$ est linéaire.

4. Φ est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 2 On considère l'application

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x^3 + y^2 + z^2, e^y \cos(z), e^y \sin(z)) \in \mathbb{R}^3$$

1. Montrer que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^3 \setminus P$, où P est un plan dont on donnera l'équation.

2. En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $(u, v, w) \in B((1, 1, 0), r)$, il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = (u, v, w)$.

3. Donner la jacobienne de f^{-1} en $(1, 1, 0)$.

Exercice 3 On considère le système d'équations

$$(\star) \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2)^2 - x + 2y + z & = 0 \\ \cos(x^2 + z^2) + e^y - 2 & = 0 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un voisinage I de 0 dans $\mathbb{R}$ et une application $\mathscr{C}^1$ $\psi : I \to \mathbb{R}^2$ telle que $\psi(0) = (0, 0)$, et, pour tout $x \in I$, $(\psi(z), z)$ est solution de $(\star)$.

2. Déterminer $\psi'(0)$.