CCID - CC1 - Sujet A

Exercice 1

1) L'application $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tH \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un endomorphisme de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|.\|)$ qui est de dimension finie donc c'est une application linéaire continue, et il existe donc $C>0$ tq $\|{}^tH\| \leq C\|H\|$.

2) On considère $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto Tr({}^tMM) \in \mathbb{R}$

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ On ~~calcule~~ remarque que

$$\cancel{\Phi(M+H) = Tr({}^t(M+H)(M+H)) = Tr(({}^tM + {}^tH)(M+H))}$$
$$\cancel{= Tr({}^tMM + {}^tMH + {}^tHM + {}^tHH)}$$

$\Phi = Tr \circ \Psi$ où
- Tr est linéaire, continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ sont de dim finie, donc différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $D\,Tr(A) = Tr$.
- $\Psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tMM$ vérifie

$$\Psi(M+H) = {}^t(M+H)(M+H) = {}^tMM + {}^tMH + {}^tHM + {}^tHH$$
$$= \Psi(M) + L(H) + R(H)$$

où $H \longmapsto L(H) = {}^tMH + {}^tHM \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ d'après (1)

et $\dfrac{\|R(H)\|}{\|H\|} = \dfrac{\|{}^tHH\|}{\|H\|} \leq \dfrac{\|{}^tH\|\|H\|}{\|H\|} \leq \dfrac{C\|H\|^2}{\|H\|} = C\|H\| \xrightarrow[H \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}]{} 0$

Donc Ψ est différentiable et $D\Psi(M)(H) = {}^tMH + {}^tHM$

→ On en déduit que $\Phi = Tr \circ \Psi$ est différentiable et

$$D\Phi(M)(H) = (D\,Tr(\Psi(M)) \circ D\Psi(M))(H) = Tr(D\Psi(M)(H))$$
$$= Tr({}^tMH + {}^tHM)$$

ie $D\Phi(M)(H) = Tr({}^tMH + {}^tHM)$

3) Tr est linéaire continue donc $\mathcal{C}^1$

Montrons que Ψ est $\mathcal{C}^1$: on a, $\forall M, M' \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall H \in M_n(\mathbb{R})$

$$\|D\Psi(M')(H) - D\Psi(M)(H)\| = \|({}^tM' - {}^tM)H + {}^tH(M'-M)\|$$
$$\le \|{}^t(M'-M)\|\|H\| + \|{}^tH\|\|M'-M\|$$
$$\le C\|M'-M\|\|H\|$$

donc $\|D\Psi(M') - D\Psi(M)\|_{\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))} \overset{\text{question 1}}{\le} C\|M'-M\|$ ~~est Lipschitzienne~~

donc $M \mapsto D\Psi(M)$ est continue car Lipschitzienne

donc Ψ est $\mathcal{C}^1$, et donc $\boxed{\Phi = Tr \circ \Psi \text{ est } \mathcal{C}^1}$

Ex 1 (suite)

3) On a, $\forall M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} D\Phi(M_1+\lambda M_2)(H) &= Tr\left({}^t(M_1+\lambda M_2)H + {}^tH(M_1+\lambda M_2)\right) \\ &= Tr\left({}^tM_1H + {}^tHM_1 + \lambda({}^tM_2H + {}^tHM_2)\right) \\ &= Tr({}^tM_1H + {}^tHM_1) + \lambda Tr({}^tM_2H + {}^tHM_2) \\ &= D\Phi(M_1)(H) + \lambda D\Phi(M_2)(H) \end{aligned}$$

$\rightarrow D\Phi(M_1+\lambda M_2) = D\Phi(M_1) + \lambda D\Phi(M_2)$

Donc $M \mapsto D\Phi(M)$ est linéaire

4) Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ sont de dimension finie, $M \longmapsto D\Phi(M)$ est automatiquement une application linéaire continue

Donc Φ est $\mathcal{C}^1$

Exercice 2

1) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, car polynomiale, et on a, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\cancel{Df}\quad Jac f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -2y+z & y \\ 0 & 3+z & y \\ 0 & z & y+1 \end{pmatrix}$$

Donc
$$\det(Jac f(x,y,z)) = 2\begin{vmatrix} 3+z & y \\ z & y+1 \end{vmatrix} = \cancel{6}\ 2((3+z)(y+1)-yz) = 2(3y+z+3)$$

Donc $\det Jac f(x,y,z) \neq 0$ $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus P$ où

$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 3y+z+3 = 0\}$

Par le théorème d'inversion locale, on en déduit que $\forall (x,y,z) \notin P$, $\exists U$ voisinage de (x,y,z) tq $f_{|U} : U \to f(U)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

2) ~~Pour que $(4,0,0) \notin P$, i~~

Remarquons que $(4,0,0) = f((2,0,0))$, et, comme $(2,0,0) \notin P$, il existe U voisinage de $(2,0,0)$ tq $f_{|U} : U \longrightarrow V$ est un C^1-difféo

V ——— $(4,0,0)$

En particulier, il existe $r > 0$ tq $B((4,0,0), r) \subset V$ et,

$\forall (x,y,z) \in B((4,0,0),r)$, $\exists (u,v,w) \in U \subset \mathbb{R}^3$ tq

$$f(u,v,w) = (x,y,z)$$

3) $Df^{-1}((4,0,0)) = Df((2,0,0))^{-1}$

or $\mathrm{Jac}\, f(2,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Jac}\, f^{-1}(4,0,0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $Df^{-1}((4,0,0))(h_1,h_2,h_3) = \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{3}h_2 + h_3.$

Exercice 3

1) Posons $F : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \left((x^2+y^2+z^2)^2 - x + 2y + z,\ \cos(x^2+z^2) + e^y - 2 \right) \in \mathbb{R}^2$

Alors F est $\mathcal{C}^1$ comme composée et somme de fonctions $\mathcal{C}^1$

et, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{Jac} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x(x^2+y^2+z^2) - 1 & 4y(x^2+y^2+z^2) + 2 & 4z(x^2+y^2+z^2) + 1 \\ -2x \sin(x^2+z^2) & e^y & -2z \sin(x^2+z^2) \end{pmatrix}$$

Remarquons que $F(0,0,0) = (0,0)$

et $\operatorname{Jac} F(0,0,0) = \left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix}}}_{D_x F(0,0,0)} \ \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}}}_{D_u F(0,0,0)} \right)$

~~Posons~~ Notons $(x,y,z) = (x,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$

Alors on a $D_u F(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ inversible

Donc, par le théorème des fonctions implicites, il existe

I voisinage de 0, U voisinage de $(0,0)$ et $\varphi : I \longrightarrow U$

tq $\varphi(0) = (0,0)$ et $\begin{pmatrix} \forall (x,y,z) \in I \times U \\ F(x,y,z) = (0,0) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \in I \\ (y,z) = \varphi(x) \end{pmatrix}$

ie $\begin{pmatrix} (x,y,z) \in I \times U \\ \text{est solution de } (*) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \in I \\ (y,z) = \varphi(x) \end{pmatrix}$

en particulier, $\forall x \in I$, $(x, \varphi(x))$ est solution de $(*)$

2) D'après le TFI, on a aussi, $\forall x \in I$

$$D\varphi(0) = - D_u F(0,\varphi(0))^{-1} \circ D_x F(0,\varphi(0))$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'après le lien dérivée différentielle, ceci donne $\varphi'(0) = (0,1)$.

B1

CCID - CC1 - Sujet B

Exercice 1

1) L'application $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tH \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est linéaire. Comme $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) < \infty$, elle est donc continue, et il existe $C>0$ tq $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|{}^tH\| \leq C\|H\|$

2) On considère $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \langle Mx_0, My_0\rangle \in \mathbb{R}$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on calcule

$$\begin{aligned}\Phi(M+H) &= \langle (M+H)x_0, (M+H)y_0\rangle \\ &= \langle Mx_0, My_0\rangle + \langle Hx_0, My_0\rangle + \langle Mx_0, Hy_0\rangle + \langle Hx_0, Hy_0\rangle \\ &= \Phi(M) + L(H) + R(H)\end{aligned}$$

où • $L : H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \langle Hx_0, My_0\rangle + \langle Mx_0, Hy_0\rangle \in \mathbb{R}$ est linéaire continue

• $$\frac{\|R(H)\|}{\|H\|} = \frac{|\langle Hx_0, Hy_0\rangle|}{\|H\|} \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \frac{\|Hx_0\|\|Hy_0\|}{\|H\|} \underset{\|Hu\| \leq \|H\|\|u\|_2}{\leq} \frac{\|H\|^2\|x_0\|_2\|y_0\|_2}{\|H\|}$$

$$\leq \|H\|\|x_0\|_2\|y_0\|_2 \xrightarrow[\|H\|\to 0]{} 0$$

Donc Φ est différentiable en M et $D\Phi(M)(H) = \langle Hx_0, My_0\rangle + \langle Mx_0, Hy_0\rangle$

3) ~~$\forall M, \forall H$~~ Soit $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}D\Phi(M_1+\lambda M_2)(H) &= \langle Hx_0, (M_1+\lambda M_2)y_0\rangle + \langle (M_1+\lambda M_2)x_0, Hy_0\rangle \\ &= \langle Hx_0, M_1y_0\rangle + \lambda\langle Hx_0, M_2y_0\rangle + \langle M_1x_0, Hy_0\rangle + \lambda\langle M_2x_0, Hy_0\rangle \\ &= \underline{D\Phi(M_1)(H)} + \lambda\, \underline{D\Phi(M_2)(H)}\end{aligned}$$

Donc $D\Phi(M_1+\lambda M_2) = D\Phi(M_1) + \lambda D\Phi(M_2)$

Donc ~~D~~ $M \longmapsto D\Phi(M)$ est linéaire.

4) $M \mapsto D\Phi(M)$ est linéaire, donc, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ sont de dimension finie, elle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2

(B2)

1) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ comme composée d'application $\mathcal{C}^1$ et, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\operatorname{Jac} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 2y & 2z \\ 0 & e^y\cos(z) & -e^y\sin(z) \\ 0 & e^y\sin(z) & e^y\cos(z) \end{pmatrix}$$

Donc $\det \operatorname{Jac} f(x,y,z) = 3x^2 \begin{vmatrix} e^y\cos z & -e^y \sin z \\ e^y\sin(z) & e^y\cos z \end{vmatrix}$

$$= 3x^2 \left(e^{2y}\cos^2 z + e^{2y}\sin^2 z\right)$$

$$= 3x^2 e^{2y}$$

Donc $\det \operatorname{Jac} f(x,y,z) \neq 0 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus P$ où

$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0\}$

Donc, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus P$, $Df(x,y,z) \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^3)$

Donc, d'après le TIL, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus P$, il existe $\underbrace{U \text{ voisinage de } (x,y,z)}_{V \text{ ——— } (x,y,z)}$ tq $f|_U : U \longrightarrow V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféo.

2) Remarquons que $f(1,0,0) = (1,1,0)$ et $(1,0,0) \notin P$

Donc il existe $\underbrace{U \text{ voisinage de } (1,0,0)}_{V \text{ ——— } (1,1,0)}$ tq $f|_U : U \longrightarrow V$ est un $\mathcal{C}^1$ difféo. En particulier, $\exists r > 0$ tq $B((1,1,0),r) \subset V$ et $\forall (x,y,z) \in B((1,1,0),r)$, $\exists (x,y,z) \in U \subset \mathbb{R}^3$ tq

$$f(u,v,w) = (x,y,z).$$

3) On a $Df^{-1}((1,1,0)) = Df(1,0,0)^{-1}$

or $\operatorname{Jac} f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$\left(\operatorname{Jac} f(1,0,0)\right)^{-1} = \left(\operatorname{Jac} f^{-1}(1,1,0)\right) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1) Posons $F : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \big((x^2+y^2+z^2)^2 - x + 2y + z,$
$\cos(x^2+z^2) + e^y - 2 \big) \in \mathbb{R}^2$

Alors F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ comme somme et composée de fonctions $\mathcal{C}^1$

et $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ~~Jac f(x,y,z) =~~

$$\operatorname{Jac} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x(x^2+y^2+z^2)-1 & 4y(x^2+y^2+z^2)+2 & 4z(x^2+y^2+z^2)+1 \\ -2x\sin(x^2+z^2) & e^y & -2z\sin(x^2+z^2) \end{pmatrix}$$

Remarquons que $F(0,0,0) = (0,0)$ et, si on note $(x,y,z) = (u,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Jac} F(0,0,0) = \Big(\underbrace{\begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{D_u F(0,0,0)} \ \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}}_{D_z F(0,0,0)} \Big)$$

donc $D_u F(0,0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible

Par le théorème des fonctions implicites, il existe donc

I voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \longrightarrow U$ $\mathcal{C}^1$

U ——— $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$

tq $\begin{pmatrix} (x,y,z) \in U \times I \\ F(x,y,z) = (0,0) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} z \in I \\ (x,y) = \varphi(z) \end{pmatrix}$

En particulier, $\forall z \in I$, $F(\varphi(z), z) = (0,0)$ donc $(\varphi(z), z)$ est solution de $(*)$

2) D'après le TFI, on a de plus

$$D\varphi(0) = -D_u F(0,0,0)^{-1} D_z F(0,0,0) = -\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc, d'après le lien dérivée - différentielle,

$\varphi'(0) = (1, 0)$.