Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne L3 MIASHS 2021-2022 Compléments de calcul intégral et différentiel

CC2 - Sujet 1

Exercice 1 Montrer qu'il existe deux fonctions \mathscr{C}^1 $u,v:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies sur un intervalle I contenant 0, telles que u(0)=0,v(0)=1, et, pour tout $x\in I$

$$\begin{cases} x^2 + u(x)^2 + v(x)^2 &= 1\\ x^2 + u(x)(u(x) - 1) &= 0 \end{cases}$$

Déterminer, pour $x \in I$, u'(x) et v'(x) en fonction de x, u(x) et v(x).

Exercice 2 On rappelle que la mesure de Dirac en $a \in \mathbb{R}$ est définie par

$$\delta_a: A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive. Montrer que

$$(\star) \quad \int_{\mathbb{R}}^* f \, d\delta_a = f(a).$$