

CC2 - SUJET 13

Exercice 1 Montrer qu'il existe deux fonctions \mathcal{C}^1 $u, v : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies sur un intervalle I contenant 0, telles que $u(0) = 1, v(0) = -1$, et, pour tout $x \in I$

$$\begin{cases} v(x) + xu(x) &= 1 + x^3 \\ u(x)^3 + v(x)^3 &= xv(x) \end{cases}$$

Déterminer l'équation de la tangente au graphe de v en 0.

Exercice 2 On rappelle que la mesure de Dirac en $a \in \mathbb{R}$ est définie par

$$\delta_a : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive. Montrer que

$$(\star) \quad \int_{\mathbb{R}}^* f d\delta_a = f(a).$$