Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2021-2022
Compléments de calcul intégral et différentiel

CC2 - Sujet 2

Exercice 1 On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2y^2 - z^2 = 0, z = -3\}$$

1. Justifier que la fonction $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ admet des extrema sur $\mathcal{C}$.
2. Déterminer le(s) point(s) de $\mathcal{C}$ le(s) plus proche de l'origine.

Exercice 2 On rappelle que la mesure de Dirac en $a \in \mathbb{R}$ est définie par

$$\delta_a : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive. Montrer que

$$(\star) \qquad \int_{\mathbb{R}}^{*} f \, d\delta_a = f(a).$$