Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2021-2022
Compléments de calcul intégral et différentiel

CC2 - Sujet 3

Exercice 1 Montrer qu'il existe deux fonctions $\mathscr{C}^1$ $u, v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies sur un intervalle I contenant 0, telles que $u(0) = v(0) = 1$, et, pour tout $x \in I$

$$\begin{cases} 2x^2 - u(x)^2 + v(x)^2 & = 0 \\ -x^2 + 3u(x)^2 - v(x)^2 & = 2 \end{cases}$$

Déterminer, pour $x \in I, u'(x)$ et $v'(x)$ en fonction de $x, u(x)$ et $v(x)$.

Exercice 2 On rappelle que la mesure de Dirac en $a \in \mathbb{R}$ est définie par

$$\delta_a : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive. Montrer que

$$(\star) \qquad \int_{\mathbb{R}}^{*} f \, d\delta_a = f(a).$$