

CC2 - SUJET 6

Exercice 1 On considère le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 défini par

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x^2 + y^2 = z^2, z = 1\}$$

1. Justifier que la fonction $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ admet des extrema sur \mathcal{C} .
2. Déterminer le(s) point(s) de \mathcal{C} le(s) plus proche de l'origine.

Exercice 2 On rappelle que la mesure de Dirac en $a \in \mathbb{R}$ est définie par

$$\delta_a : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive. Montrer que

$$(\star) \quad \int_{\mathbb{R}}^* f d\delta_a = f(a).$$