Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2021-2022
Compléments de calcul intégral et différentiel

CC2 - SUJET 8

Exercice 1 On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = 2,\ y + z = 2\}$$

Justifier que la fonction $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 - yz^2$ admet des extrema sur $\mathcal{C}$. Déterminer ces extrema.

Exercice 2 On rappelle que la mesure de Dirac en $a \in \mathbb{R}$ est définie par

$$\delta_a : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive. Montrer que

$$(\star) \quad \int_{\mathbb{R}}^{*} f \, d\delta_a = f(a).$$