

CC2 - SUJET 9

**Exercice 1** Montrer qu'il existe deux fonctions  $\mathcal{C}^1$   $u, v : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies sur un intervalle  $I$  contenant 0, telles que  $u(0) = 0, v(0) = 1$ , et, pour tout  $x \in I$

$$\begin{cases} 2u(x)v(x) - u^2(x) & = x \\ v^2(x) + 2u^2(x) & = 1 \end{cases}$$

Déterminer, pour  $x \in I$ ,  $u'(x)$  et  $v'(x)$  en fonction de  $x, u(x)$  et  $v(x)$ .

**Exercice 2** On rappelle que la mesure de Dirac en  $a \in \mathbb{R}$  est définie par

$$\delta_a : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borélienne positive. Montrer que

$$(\star) \quad \int_{\mathbb{R}}^* f d\delta_a = f(a).$$