

CC2 - SUJET 9

Exercice 1 Montrer qu'il existe deux fonctions \mathcal{C}^1 $u, v : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies sur un intervalle I contenant 0, telles que $u(0) = 0, v(0) = 1$, et, pour tout $x \in I$

$$\begin{cases} 2u(x)v(x) - u^2(x) & = x \\ v^2(x) + 2u^2(x) & = 1 \end{cases}$$

Déterminer, pour $x \in I$, $u'(x)$ et $v'(x)$ en fonction de $x, u(x)$ et $v(x)$.

Exercice 2 On rappelle que la mesure de Dirac en $a \in \mathbb{R}$ est définie par

$$\delta_a : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive. Montrer que

$$(\star) \quad \int_{\mathbb{R}}^* f d\delta_a = f(a).$$