Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2021-2022
Compléments de calcul intégral et différentiel

Examen de première session - 13 mai 2022

Durée : 2h.
Les exercices sont indépendants, et pevent être traités dans n'importe quel ordre.
La précision de l'argumentation sera une part importante dans l'évaluation.
Montrez-moi ce que vous savez faire !

Partie 1 : Calcul différentiel

Exercice 1 On pose

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (\|x\|_2^2 + 1)x \end{aligned}$$

1. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que F est un $\mathscr{C}^1$- difféomorphisme au voisinage de 0. Donner la différentielle de sa réciproque en 0.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$DF(x)(h) = (\|x\|_2^2 + 1)h + 2\langle x, h\rangle x$$

4. En déduire que F est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
   Indication : Remarquer que $t \mapsto t^3 + t$ est une bijection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 2 Soit $\mathcal{C}$ la courbe de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2y^2 - z^2 = 1, -x + 3z = -1\}$$

On cherche les points de $\mathcal{C}$ les plus proches de l'origine.

1. Montrer que $u \mapsto \|u\|^2$ est bornée inférieurement sur $\mathcal{C}$ et que cette borne est atteinte en un point de $\mathcal{C}$.
2. Déterminer la distance de $\mathcal{C}$ à l'origine, ainsi que les points de $\mathcal{C}$ les plus proches de l'origine.

Partie 2 : Calcul intégral

On rappelle que la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ est définie par

$$\mu_{\mathbb{N}} : A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \mathrm{Card}(A)$$

et, pour toute fonction mesurable positive $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, on a

$$\int_{\mathbb{N}}^{*} f \, d\mu_{\mathbb{N}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n).$$

Suite au verso ↻

Exercice 3 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^n$ une suite positive. On pose

$$\mu : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \mu_{\mathbb{N}}(B \cap \mathbb{N});$$
$$\mu_{(a_n)} : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n \in B\cap\mathbb{N}} a_n$$

1. Montrer que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. On admet pour la suite que, pour toute fonction borélienne positive f,
$$\int_{\mathbb{R}}^* f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$$
2. En déduire que $\mu_{(a_n)}$ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et que, pour toute fonction borélienne positive f,
$$\int_{\mathbb{R}}^* f d\mu_{(a_n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n f(n)$$
Indication : On peut montrer que $\mu_{(a_n)}$ est une mesure à densité par rapport à μ.

On note λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. On définit

$$\nu : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \int_A^* e^{-3x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) d\lambda(x) + \sum_{n\in\mathbb{N}\cap A} \frac{3^n}{n!}$$

3. Justifier que ν est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Est-ce une mesure finie ?
4. Donner, pour une fonction $f \in \mathcal{L}_+^0(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, l'expression de $\int_{\mathbb{R}}^* f d\nu$.
5. On considère la fonction $g(x) = e^{2x}$. Justifier que $g \in \mathscr{L}^0((\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})); (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})))$.
6. Déterminer pour quels $p \in [1, +\infty[$ on a $g \in \mathscr{L}^p(\nu)$.