Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2021-2022
Compléments de calcul intégral et différentiel

Examen de première session - 13 mai 2022 - Corrigé

Moyenne : 9.5/20 (barème sur 23), avec un écart-type de 3.3.
Les notes vont de 1.5 à 16.

Partie 1 : Calcul différentiel

Exercice 1 (/8 points) On pose

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto (\|x\|_2^2 + 1)x$$

1. **(/1pt)** Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. **(/2pt)** Montrer que F est un $\mathscr{C}^1$- difféomorphisme au voisinage de 0. Donner la différentielle de sa réciproque en 0.
3. **(/2pt)** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,
$$DF(x)(h) = (\|x\|_2^2 + 1)h + 2\langle x, h\rangle x$$
4. **(/3pt)** En déduire que F est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
Indication : Remarquer que $t \mapsto t^3 + t$ est une bijection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Corrigé :

1. **Méthode 1 :** Les composantes de F sont données par
$$\forall i = 1, ..., n, \;\; F_i(x) = (\|x\|_2^2 + 1)x_i = (x_1^2 + ... + x_n^2 + 1)x_i$$
$\rightsquigarrow$ les F_i sont des polynômes, donc sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Donc F est $\mathcal{C}^1$.

Méthode 2 : Notons
$$\varphi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|_2^2 + 1 = \langle x, x\rangle + 1,$$
$$\pi : (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \lambda u \in \mathbb{R}^n$$

Alors
— φ est somme d'une application quadratique continue (produit scalaire) et d'une constante, donc est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$;
— π est bilinéaire continue, donc $\mathcal{C}^1$;
donc $F = \pi \circ (\varphi, id_{\mathbb{R}^n})$ est une composée de fonctions $\mathcal{C}^1$, donc est $\mathcal{C}^1$.

Remarques : Quelques erreurs ou imprécisions fréquentes :
— Si je vous demande de montrer que l'application est $\mathcal{C}^1$... c'est que j'attends une justification ! Un phrase du style "F est $\mathcal{C}^1$ car c'est une somme/composée/porduit de fonctions $\mathcal{C}^1$", sans préciser lesquelles ni pourquoi elles sont $\mathcal{C}^1$, n'est probablement pas suffisante.
— La norme $\|.\|_2$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$! Elle n'est pas différentiable en $0_{\mathbb{R}^n}$.
— Ni $\|.\|_2$, ni $\|.\|_2^2$ ne sont linéaires.

— Attention à ne pas confondre les réels et les vecteurs : x est un vecteur ici, pas un scalaire !

2. On calcule la différentielle de F en 0 :
   Méthode 1 : Soit $h \in \mathbb{R}^n$, on calcule
   $$F(0+h) = F(h) = (\|h\|^2+1)h = h + \|h\|^2 h = F(0) + Id(h) + R(h)$$
   avec $F(0) = 0$, Id linéaire continue et
   $$\frac{\|R(h)\|}{\|h\|} = \frac{\|h\|^3}{\|h\|} = \|h\|^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$
   donc la différentielle de F en 0 est Id.

   Méthode 2 : On a noté que les composantes de F sont données par $F_i(x) = (x_1^2 + ... + x_n^2 + 1)x_i$, donc
   $$\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) = 2x_i^2 + (x_1^2 + ... + x_n^2 + 1) \rightsquigarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(0) = 1$$
   $$\text{et pour } i \neq j, \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = 2x_j x_i \rightsquigarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(0) = 0$$
   donc $Jacf(0) = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, autrement dit $DF(0) = Id$.

   $\rightsquigarrow$ F est $\mathcal{C}^1$ en 0 et $DF(0)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
   D'après le théorème d'inversion locale, il existe donc U, V voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que $F_{|U} : U \to V$ est une $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

   On a de plus
   $$D(F^{-1})(0) = D(F^{-1})(F(0)) = (DF(0))^{-1} = I_n^{-1} = I_n.$$

   Remarque : Pour le calcul de la différentielle de F : il ne suffit pas que $R(h) \to 0$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on calcule la différentielle de F en x.

   Méthode 1 : Soit $h \in \mathbb{R}^n$, on calcule
   $$\begin{aligned} F(x+h) &= (\|x+h\|^2+1)(x+h) = (\langle x+h, x+h\rangle + 1)(x+h) \\ &= (\|x\|^2 + 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2 + 1)(x+h) \\ &= (\|x\|^2+1)x + (\|x\|^2+1)h + 2\langle x, h\rangle x + 2\langle x, h\rangle h + \|h\|^2(x+h) \\ &= F(x) + L(h) + R(h) \end{aligned}$$
   où $L(h) = (\|x\|^2+1)h + 2\langle x, h\rangle x$ est linéaire continue sur $\mathbb{R}^n$
   et $R(h) = 2\langle x, h\rangle h + \|h\|^2(x+h)$ vérifie
   $$\frac{\|R(h)\|}{\|h\|} = \frac{2|\langle x, h\rangle|\|h\| + \|h\|^2\|x+h\|}{\|h\|} \leq 2\|x\|\|h\| + \|h\|\|x+h\| \to 0$$
   donc la différentielle de F en x est bien
   $$DF(x) = (\|x\|^2+1)h + 2\langle x, h\rangle x$$

Méthode 2 : On calcule (voir ci-dessus) :

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \begin{cases} 2x_j x_i \text{ si } i \neq j \\ 2x_i^2 + (\|x\|^2+1) \text{ si } i = j \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} Jac(f)(x) &= \begin{pmatrix} (\|x\|^2+1)+2x_1^2 & 2x_1x_2 & \dots & 2x_1x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 2x_nx_1 & 2x_nx_2 & \dots & (\|x\|^2+1)+2x_n^2 \end{pmatrix} \\ &= (\|x\|^2+1)I_n + \begin{pmatrix} 2x_1^2 & 2x_1x_2 & \dots & 2x_1x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 2x_nx_1 & 2x_nx_2 & \dots & 2x_n^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où, pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$DF(x)(h) = (\|x\|^2+1)h + 2\begin{pmatrix} x_1^2h_1 + x_1x_2h_2 + \dots + x_1x_nh_n \\ \vdots \\ x_nx_1h_1 + x_nx_2h_2 + \dots + x_n^2h_n \end{pmatrix} = (\|x\|^2+1)h + 2\begin{pmatrix} x_1\langle x,h\rangle \\ \vdots \\ x_n\langle x,h\rangle \end{pmatrix}$$

donc on a bien

$$DF(x)(h) = (\|x\|^2+1)h + \langle x,h\rangle x$$

Méthode 3 : Par composition : on reprend les notations de la question 1 :

$$\varphi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|_2^2 + 1 = \langle x,x\rangle + 1,$$
$$\pi : (\lambda, u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \mapsto \lambda u \in \mathbb{R}^n$$

Soient $x, h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(x+h) = \langle x+h, x+h\rangle + 1 &= (\|x\|^2+1) + \underbrace{2\langle x,h\rangle}_{L(h)} + \underbrace{\|h\|^2}_{R_1(h)} \\ &= \varphi(x) + L_1(h) + R_1(h) \end{aligned}$$

avec L_1 linéaire, donc continue puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, et

$$\frac{|R_1(h)|}{\|h\|} = \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

donc la différentielle de φ en x est $D\varphi(x)(h) = 2\langle x,h\rangle$.
Remarque : On a en fait déjà fait ça : φ est la somme d'une constante et d'une forme quadratique, et on sait calculer la différentielle ce type de fonction !
Regardons maintenant π. On munit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ d'une de ses normes produits ; par exemple $\|(\lambda,u)\| = |\lambda| + \|u\|$.
Alors, pour $(\lambda,u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $(t,h) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} \pi((\lambda,u)+(t,h)) = (\lambda+t)(u+h) &= \lambda u + \underbrace{\lambda h + tu}_{\text{linéaire / }(t,h)} + \underbrace{th}_{R_2(t,h)} \\ &= \pi(\lambda,u) + L_2(t,h) + R_2(t,h) \end{aligned}$$

avec L_2 linéaire, donc continue puisque $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est de dimension finie, et

$$\frac{|R_2(t,h)|}{\|(t,h)\|} = \frac{|t|\|h\|}{\|(t,h)\|} \leq \frac{\|(t,h)\|^2}{\|(t,h)\|} = \|(t,h)\} \xrightarrow[(t,h)\to 0_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}]{} 0$$

donc la différentielle de π en x est $D\pi(\lambda, u)(t,h) = \lambda h + tu$.
Remarque : Ca aussi, on l'a déjà vu ! π est une application bilinéaire.

Enfin, on a vu que $F = \pi \circ (\varphi, id_{\mathbb{R}^n})$ donc par la formule de composition,

$$\begin{aligned} DF(x) &= D\pi(\varphi(x), x) \circ D(\varphi, Id)(x)(h) = D\pi(\varphi(x), x)(D\varphi(x)(h), DId(x)(h)) \\ &= D\pi(\varphi(x), x)(2\langle x, h\rangle, h) \\ &= 2\langle x, h\rangle x + \varphi(x)h = 2\langle x, h\rangle x + (\|x\|^2 + 1)h \end{aligned}$$

comme on s'y attendait.

Remarques :
— F n'est pas linéaire, et même si elle s'écrit "Truc $\times x$", on ne peut pas en déduire que la "dérivée" de F est Truc ! Ca, ça ne marche que si Truc ne dépende pas de x.
— D'ailleurs, la dérivée de F n'existe pas : F est définie sur $\mathbb{R}^n$ et pas sur $\mathbb{R}$. Le gradient de F n'est pas défini non plus : F est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et pas dans $\mathbb{R}$.

4. Puisque F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, on peut utiliser le théorème d'inversion globale : on doit montrer que
— $DF(x)$ est un isomorphisme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$
— F est *bijective* de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
Commençons par démontrer que $DF(x)$ est un isomorphisme. Puisque $DF(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ est un endomorphisme d'un e.v. de dimension finie, il suffit de démontrer que $\mathrm{Ker}(DF(x)) = \{0\}$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^n$, alors

$$h \in Ker(DF(x)) \iff DF(x)(h) = 0 \iff (\|x\|^2 + 1)h + \langle x, h\rangle x = 0$$

donc, en prenant le produit scalaire avec h on trouve

$$(\|x\|^2 + 1)\|h\|^2 + \langle x, h\rangle^2 = 0$$

donc

$$\underbrace{(\|x\|^2 + 1)\|h\|^2}_{\geq 0} = \underbrace{-\langle x, h\rangle^2}_{\leq 0}$$

donc $(\|x\|^2 + 1)\|h\|^2 = 0$, donc $\|h\| = 0$, donc $h = 0$.
$\rightsquigarrow DF(x)$ est un isomorphisme.

Montrons que F est bijective. Soit $y \in \mathbb{R}^n$, montrons qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(x) = y$. On a $F(x) = y \iff (\|x\|^2 + 1)x = y$; en prenant la norme, on trouve

$$\|x\|^3 + \|x\| = \|y\|$$

or $t \mapsto t + t^3$ est une bijection $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\alpha^3 + \alpha = \|y\|$$

On en déduit que $\|x\| = \alpha$ et, de là,

$$x = \frac{y}{\alpha + 1}$$

$\rightsquigarrow$ On a donc bien montré que y avait un unique antécédent $x \in \mathbb{R}^n$. Donc F est bijective.

D'après le théorème d'inversion globale, on en déduit que F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque : Attention aux hypothèses du théorème d'inversion globale : si on montre simplement que $DF(x)$ est un isomorphisme et que F est injective , on obtient que F est un $\mathcal{C}^1$-difféo *sur son image* : il faut donc aussi vérifier que $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

De plus, $DF(x)$ est linéaire, mais F ne l'est pas : $\mathrm{Ker}(F)$ n'est pas défini et il ne suffit pas de montrer que $F(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ pour montrer que F est injective.

Exercice 2 (/6) Soit $\mathcal{C}$ la courbe de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2y^2 - z^2 = 1, -x + 3z = -1\}$$

On cherche les points de $\mathcal{C}$ les plus proches de l'origine.

1. **(/2pt)** Montrer que $u \mapsto \|u\|^2$ est bornée inférieurement sur $\mathcal{C}$ et que cette borne est atteinte en un point de $\mathcal{C}$.
2. **(/4pt)** Déterminer la distance de $\mathcal{C}$ à l'origine, ainsi que les points de $\mathcal{C}$ les plus proches de l'origine.

Corrigé : On commence par justifier que la fonction $f : u \in \mathbb{R}^3 \mapsto \|u\|^2 \in \mathbb{R}$ admet un minimum sur $\mathcal{C}$, puis on va utiliser le théorème des extrema liés pour déterminer ce minimum et le(s) point(s) où il est atteint.

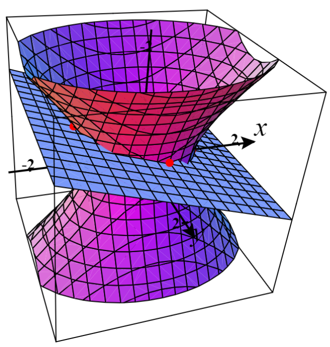

Figure 1 – $\mathcal{C}$ est l'intersection d'un paraboloïde (la cheminée de centrale) et d'un plan. Voir figure en 3D ici .

1. Notons g la fonction décrivant $\mathcal{C}$:

$$g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (\underbrace{x^2 + 2y^2 - z^2 - 1}_{g_1(x,y,z)}, \underbrace{1 - x + 3z}_{g_2(x,y,z)}) \in \mathbb{R}^2$$

$\rightsquigarrow$ g est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^3$.
De même, $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^3$.
Par ailleurs, puisque $\{(0, 0)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$, on en déduit que $\mathcal{C} = g^{-1}(\{(0, 0)\})$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$. De plus, $\mathcal{C} \neq \emptyset$ puisque $u_0 = (1, 0, 0) \in \mathcal{C}$.
Méthode 1 : On en déduit que $\mathcal{C} \cap \overline{B}(0, \|u_0\|) \neq \emptyset$. De plus, $\overline{B}(0, \|u_0\|)$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension finie, donc compact.
On en déduit que $K = \mathcal{C} \cap \overline{B}(0, \|u_0\|)$ est compact (c'est l'intersection d'un fermé et d'un compact), donc f est bornée et atteint ses bornes sur K.
En particulier, elle admet un minimum sur K, atteint en un point $u_{\min} \in K$. On a alors, pour tout $u \in \mathcal{C}$:
— Soit $u \in K$, et alors $f(u) \geq f(u_{\min})$, par définition de $u_{\min}$.
— Soit $u \notin K$, et alors $\|u\|^2 \geq \|u_0\|^2 = f(u_0) \geq f(u_{\min})$.
donc $u_{\min}$ est un minimum global de f sur $\mathcal{C}$.

Méthode 2 : Soit $u = (x, y, z) \in \mathcal{C}$. Alors on a $x = 1 + 3z$, et $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$ donc

$$\begin{aligned}(1 + 3z)^2 + 2y^2 - z^2 = 1 &\iff 8z^2 + 6z + 2y^2 = 0 \\ &\iff 2(4z^2 + 3z) + 2y^2 = 0 \\ &\iff 2(2z + \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{8} + 2y^2 = 0 \\ &\iff (2z + \frac{3}{4})^2 + y^2 = \frac{9}{16}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}|2z + \frac{3}{4}| \leq \frac{3}{4} &\rightsquigarrow |z| \leq \frac{3}{4} \\ |y| \leq \frac{3}{4} &\text{ et } |x| = |1 + 3z| \leq 1 + \frac{9}{16}.\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{C}$ est borné : puisqu'il est fermé, c'est un compact de $\mathbb{R}^3$, et donc f est bornée et atteint ses bornes sur C. En particulier, f admet un minimum global sur f.

2. On a vu que f et g sont polynomiales, donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. On a de plus, pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$Jac(g)(u) = \begin{pmatrix} 2x & 4x & -2z \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$Dg(u)$ est de rang 2, sauf si $y = 0$ et la première et la troisième colonnes sont colinéaires : mais alors on a

$$3 * (2x) = (-1) * (-2z) \text{ i.e. } z = 3x$$

Mais pour tout $u \in \mathcal{C}$ on a aussi $-x + 3z = -1$ donc on aurait alors $x = \frac{1}{8}$ et $z = \frac{3}{8}$, or $(\frac{1}{8}, 0, \frac{3}{8}) \notin \mathcal{C}$.
Donc $Dg(u)$ est surjective pour tout $u \in \mathcal{C}$.

Remarque : Voir les hypothèses du TEL quand il y a plusieurs contraintes : il ne suffit pas que $\nabla g_1(u)$ et $\nabla g_2(u)$ soient non nuls pour tout $u \in \mathcal{C}$.

D'après le théorème des extrema liés : si $f_{|\mathcal{C}}$ a un extremum en $u = (x, y, z) \in \mathcal{C}$, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\nabla f(u) = \lambda \nabla g_1(u) + \mu \nabla g_2(u),$$

ce qui donne

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x - \mu \\ 2y = 4\lambda y \\ 2z = -2\lambda z + 3\mu \\ -x + 3z = -1 \\ x^2 + 2y^2 - z^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(1-\lambda)x = \mu & (L_1) \\ (2\lambda - 1)y = 0 & (L_2) \\ 2(\lambda+1)z = 3\mu & (L_3) \\ -x + 3z = -1 & (L_4) \\ x^2 + 2y^2 - z^2 = 1 & (L_5) \end{cases}$$

D'après (L_2) on a soit $y = 0$, soit $\lambda_{\frac{1}{2}}$.

Cas 1 : $y = 0$. Alors par (L_4) on a $x = 3z + 1$ et par (L_5) on a $x^2 - z^2 = 1$ donc

$$\begin{cases} x = 3z + 1 \\ (3z+1)^2 - z^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3z + 1 \\ z(4z+3) = 0 \end{cases}$$

Il y a donc deux possibilités : soit $z = 0$ et $x = 1$, ce qui nous donne un premier candidat $u_1 = (1, 0, 0)$.
soit $z = -\frac{3}{4}$ et $x = -\frac{5}{4}$, ce qui nous donne un second candidat $u_2 = (-\frac{5}{4}, 0, -\frac{3}{4})$.
Cas 2 : $\lambda = \frac{1}{2}$. Alors par (L_3) on a $-x = \mu$, par (L_4) on a $3z = 3\mu$ donc $z = \mu = -x$, et par (L_4) on a $-x + 3z = 4\mu = -1$ donc $\mu = -\frac{1}{4}$.
En résumé, on trouve alors $x = \frac{1}{4}, z = -\frac{1}{4}$, et par (L_5),

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2y^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \rightsquigarrow y^2 = \frac{1}{2}.$$

On trouve donc deux autres points candidats

$$u_3 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}) \text{ et } u_4 = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4})$$

Pour déterminer le minimum global de $f_{|\mathcal{C}}$, on regarde pour lequel de ces 4 points f prend la plus petite valeur. On a

$$f(u_1) = 1, \; f(u_2) = \frac{9}{4}, \; f(u_3) = f(u_4) = \frac{5}{8}$$

$\rightsquigarrow$ Le minimum de f sur $\mathcal{C}$ est atteint en u_3 et u_4 est vaut $\frac{5}{8}$.

Remarque : Attention à ne pas oublier de traiter le cas $y = 0$, ou que l'équation $y^2 = \frac{1}{2}$ a deux solutions.

Suite au verso ↻

Partie 2 : Calcul intégral

On rappelle que la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ est définie par

$$\mu_{\mathbb{N}} : A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \mathrm{Card}(A)$$

et, pour toute fonction mesurable positive $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, on a

$$\int_{\mathbb{N}}^* f \, d\mu_{\mathbb{N}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n).$$

Exercice 3 (/9) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^n$ une suite positive. On pose

$$\mu : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \mu_{\mathbb{N}}(B \cap \mathbb{N});$$
$$\mu_{(a_n)} : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n \in B\cap\mathbb{N}} a_n$$

1. **/1.5** Montrer que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. On admet pour la suite que, pour toute fonction borélienne positive f,
$$\int_{\mathbb{R}}^* f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$$
2. **/1.5** En déduire que $\mu_{(a_n)}$ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et que, pour toute fonction borélienne positive f,
$$\int_{\mathbb{R}}^* f d\mu_{(a_n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n f(n)$$
Indication : On peut montrer que $\mu_{(a_n)}$ est une mesure à densité par rapport à μ.

On note λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. On définit

$$\nu : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \int_A^* e^{-3x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) d\lambda(x) + \sum_{n\in\mathbb{N}\cap A} \frac{3^n}{n!}$$

3. **/2** Justifier que ν est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Est-ce une mesure finie ?
4. **/1.5** Donner, pour une fonction $f \in \mathcal{L}_+^0(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, l'expression de $\int_{\mathbb{R}}^* f d\nu$.
5. **/1.5** On considère la fonction $g(x) = e^{2x}$. Justifier que $g \in \mathscr{L}^0((\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})); (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})))$.
6. **/2** Déterminer pour quels $p \in [1, +\infty[$ on a $g \in \mathscr{L}^p(\nu)$.

Corrigé :

1. Vérifions que $\mu : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \mu_{\mathbb{N}}(B \cap \mathbb{N})$ est une mesure.
   — μ est à valeurs dans $[0, +\infty]$ puisque μ_n l'est.
   — $\mu(\emptyset) = \mu_{\mathbb{N}}(\emptyset \cap \mathbb{N}) = \mu_{\mathbb{N}}(\emptyset) = 0$, puisque $\mu_{\mathbb{N}}$ est une mesure.
   — Soit $(A_n)_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de boréliens disjoints. On a alors
   $$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu_{\mathbb{N}}(\left(\bigcup_n A_n\right) \cap \mathbb{N}) = \mu_{\mathbb{N}}\left(\bigcup_n (A_n \cap \mathbb{N})\right) \qquad (1)$$
   Or les $(A_n \cap \mathbb{N})$ forment une famille disjointe de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, donc, puisque $\mu_{\mathbb{N}}$ est une mesure,
   $$\mu_{\mathbb{N}}\left(\bigcup_n (A_n \cap \mathbb{N})\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_{\mathbb{N}}(A_n \cap \mathbb{N}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

$\rightsquigarrow$ μ est une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Bonus : Pendant qu'on y est, démontrons la formule

$$\int_{\mathbb{R}}^{*} f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$$

On le fait en trois étapes : d'abord on traite le cas où f est une indicatrice, puis le cas où f est étagée, et enfin le cas général de f borélienne positive.

— Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{\mathbb{R}}^{*} \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A) = \mu_{\mathbb{N}}(A \cap \mathbb{N}) = \sum_{n \in A \cap \mathbb{N}} 1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_A(n).$$

$\rightsquigarrow$ La formule est vraie pour les fonctions indicatrices.

— Soit $e = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ une fonction étagée positive. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}}^{*} e d\mu &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \int_{\mathbb{R}}^{*} \mathbb{1}_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_i}(n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e(n) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ La formule est vraie pour les fonctions étagées.

— Soit maintenant f une fonction borélienne positive. Alors il existe une suite croissante $(e_k)_k$ de fonctions étagées positives telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e_k(x) \to f(x)$.
Et du coup, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}}^{*} e_k d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} e_k(n)$$

Maintenant, l'idée, ça va être de passer à la limite $k \to \infty$ dans cette égalité. Pour ça, on va faire appel au théorème de M. Levi (Beppo Levi pour les intimes). D'après lui,

$$\int_{\mathbb{R}}^{*} e_k d\mu \xrightarrow[k \to \infty]{} \int_{\mathbb{R}}^{*} f d\mu$$

Pour l'autre terme, remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_k(n) \to f(n)$, et $e_{k|\mathbb{N}} : n \mapsto e_k(n)$ est mesurable de $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vers $(\mathbb{R}^+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^+))$ donc, toujours d'après Beppo,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} e_k(n) = \int_{\mathbb{N}}^{*} e_{k|\mathbb{N}} d\mu_{\mathbb{N}} \xrightarrow[k \to \infty]{} \int_{\mathbb{N}} f_{|\mathbb{N}}^{*} d\mu_{\mathbb{N}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$$

Donc, par unicité de la limite, on a bien

$$\int_{\mathbb{R}}^{*} f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$$

2. On définit la fonction

$$f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \mathbb{N} \\ a_n \text{ si } x = n \in \mathbb{N} \end{cases} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbb{1}_{\{n\}}$$

Alors f_a est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}^+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^+))$, car c'est une limite de fonctions mesurables ($f_N = \sum_{n=0}^N a_n \mathbb{1}_{\{n\}}$).

Vérifions que $\mu_{(a_n)}$ est la mesure de densité f_a par rapport à la mesure μ. Soit $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\int_B^* f_a d\mu = \int_{\mathbb{R}}^* f_a \mathbb{1}_B d\mu = \sum_n f(n)\mathbb{1}_B(n) = \sum_{n\in\mathbb{N}\cap B} a_n = \mu_{(a_n)}(B)$$

$\rightsquigarrow$ $\mu_{(a_n)}$ est bien la mesure de densité f_a par rapport à μ. C'est donc bien une mesure, et de plus, pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ borélienne positive, on a

$$\int_{\mathbb{R}}^* g d\mu_{(a_n)} = \int_{\mathbb{R}}^* g f_a d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} g(n) a_n.$$

Remarque : Ne pas sous-estimer l'intérêt des mesures à densité ! Cette manip épargne beaucoup de travail, surtout pour l'expression de $\int_{\mathbb{R}}^* g d\mu_{(a_n)}$. D'où l'indication, qu'il est dommage d'ignorer aussi souverainement !

3. On décompose ν en $\nu = \nu_1 + \nu_2$, où

$$\nu_1 : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \int_A^* e^{-3x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) d\lambda(x)$$
$$\nu_2 : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}\cap A} \frac{3^n}{n!}$$

Remarquons déjà que, si on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{3^n}{n!}$, alors $\nu_2 = \mu_{(a_n)}$ (en reprenant les notations de l'énoncé), donc d'après 2., ν_2 est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

D'autre part, posons la fonction

$$h : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-3x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

alors h est borélienne positive : en effet, c'est le produit de $x \mapsto e^{-3x}$ qui est continue, donc borélienne, et de $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ qui est l'indicatrice d'un borélien. Et de plus, ν_1 est la mesure de densité h par rapport à la mesure de Lebesgue λ, donc ν_1 est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

$\rightsquigarrow$ ν est une somme de deux mesures, donc c'est une mesure. De plus,

$$\begin{aligned}
\nu(\mathbb{R}) = \nu_1(\mathbb{R}) + \nu_2(\mathbb{R}) &= \int_{\mathbb{R}}^* e^{-3x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) d\lambda(x) + \sum_{n\in\mathbb{N}\cap\mathbb{R}} \frac{3^n}{n!} \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \\
&= \left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^{\infty} + e^3 = 1 + e^3 \\
&< \infty
\end{aligned}$$

donc ν est une mesure finie.

Remarque : A nouveau, exprimer ν_2 comme mesure à densité permet d'éviter des raisonnements imprécis du type

$$\int^*_{\bigcup A_n} e^{-3x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)d\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{A_n} e^{-3x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)d\lambda(x)$$

(ou alors, il faut savoir le montrer !)
D'ailleurs, attention à ne pas confondre les sommes finies et infinies : pour la σ-additivité, il faut prendre une famille de boréliens *dénombrable* disjointe $(A_n)_n$ et pas une famille finie !

4. Soit $f \in \mathscr{L}^0_+(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Alors on a

$$\int^*_{\mathbb{R}} f d\nu = \int^*_{\mathbb{R}} f d\nu_1 + \int^*_{\mathbb{R}} f d\nu_2.$$

Or, puisque ν_1 est une mesure à densité,

$$\int^*_{\mathbb{R}} f d\nu_1 = \int^*_{\mathbb{R}} f(x)e^{-3x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)d\lambda(x) = \int^*_{\mathbb{R}+} f(x)e^{-3x}d\lambda(x).$$

D'autre part, d'après 2.,

$$\int^*_{\mathbb{R}} f d\nu_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)\frac{3^n}{n!}$$

d'où au total

$$\int^*_{\mathbb{R}} f d\nu = \int^*_{\mathbb{R}+} f(x)e^{-3x}d\lambda(x) + \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)\frac{3^n}{n!}.$$

Remarque : Au risque d'être insistante, les mesures à densité, c'est quand même pratique.

5. g est continue, donc borélienne.

Remarque : Oui, vraiment, c'est tout ! Voir aussi l'exercice 2 de la feuille de TD2 pour la preuve.

6. La fonction g appartient à $\mathscr{L}^p(\nu)$ ssi $\int^*_{\mathbb{R}} |g|^p d\nu$. Or d'après 3., on a, pour $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}\int^*_{\mathbb{R}} |g|^p d\nu &= \int^*_{\mathbb{R}+} |e^{2x}|^p e^{-3x}d\lambda(x) + \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{3^n}{n!}(e^{2n})^p \\ &= \int_0^{+\infty} e^{2p-3}dx + \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(3e^2p)^n}{n!}\end{aligned}$$

L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{2p-3}dx$ converge ssi $2p-3<0$, i.e $p<\frac{3}{2}$.
D'autre part, $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(3e^2p)^n}{n!} = e^{3e^{2p}} < \infty$ quel que soit p.
$\rightsquigarrow$ On en déduit que $g \in \mathscr{L}^p(\nu)$ ssi $p \in [1, \frac{3}{2}[$.