Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2021-2022
Compléments de calcul intégral et différentiel

Examen de deuxième session - 29 juin 2022

Durée : 2h.
Les exercices sont indépendants, et pevent être traités dans n'importe quel ordre.
La précision de l'argumentation sera une part importante dans l'évaluation.
Montrez-moi ce que vous savez faire !

Partie 1 : Calcul intégral

Soit $a \in \mathbb{R}$. On rappelle que la mesure de Dirac en a, δ_a sur $(\mathbb{R}, \mathscr{P}(\mathbb{R}))$ est définie par

$$\delta_a : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{1}_A(a)$$

Exercice 1 On se place dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et on définit

$$\mu : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \delta_k(B)$$

1. Montrer que μ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et que, pour toute fonction borélienne positive f,
$$\int_{\mathbb{R}}^{*} f d\mu = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} f(k)$$
2. Calculer $\mu(\{0,1,2\}), \mu(\{0,n\}), \mu(\mathbb{N}), \mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$.
3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n = \mathbb{1}_{[0,n]}$ est borélienne. Est-elle continue μ-presque partout ?
4. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction à déterminer, puis calculer
$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}}^{*} f_n d\mu.$$
5. Justifier que $g : x \mapsto \exp(x \ln(\frac{3}{2}))$ est borélienne, puis déterminer les $p \in [1, +\infty[$ tels que $g \in \mathscr{L}^p(\mu)$.

Corrigé :

1. - **μ est une mesure :**
   D'une part, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\delta_k(\emptyset) = 0$ puisque δ_k eest une mesure. Donc
   $$\mu(\emptyset) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \underbrace{\delta_k(\emptyset)}_{=0} = 0.$$
   D'autre part, soit $(B_n)_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de boréliens tels que, si $n \neq m$, $B_n \cap B_m = \emptyset$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, puisque δ_k est une mesure,
   $$\delta_k(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_k(B_n)$$

Donc

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^k}\delta_k\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^k}\delta_k(B_n)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^k}\delta_k(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^k}\delta_k(B_n)}_{=\mu(B_n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(B_n)$$

$\rightsquigarrow$ μ est une mesure [1].

- **μ est une probabilité :** Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\delta_k(\mathbb{R})=1$ donc

$$\mu(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^k}\delta_k(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$\rightsquigarrow$ μ est une mesure de probabilité.

- **Intégrale d'une fonction par rapport à μ :** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ une fonction borélienne positive. Montrons que

$$\int_{\mathbb{R}}^* f\,d\mu = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^k}f(k)$$

On va procéder en trois étapes :

  - Supposons d'abord que $f=\mathbb{1}_A$, où $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Alors, par définition de δ_k,

$$\int_{\mathbb{R}}^* f\,d\mu = \mu(A) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^k}\delta_k(A) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^k}\mathbb{1}_A(k)$$

  donc la formule est vérifiée pour les indicatrices des boréliens.

  - Supposons maintenant que f est une fonction étagée positive : il existe donc une partition mesurable finie $A_1,\dots,A_n$ et $(y_1,\dots,y_n)\in(\mathbb{R}^+)^n$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^n y_i\mathbb{1}_{A_i}$$

  Mais alors, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_{\mathbb{R}}^* f\,d\mu = \sum_{i=1}^n y_i\int_{\mathbb{R}}^* \mathbb{1}_{A_i}d\mu = \sum_{i=1}^n y_i\left(\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^k}\mathbb{1}_{A_i}(k)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^k}\left(\sum_{i=1}^n y_i\mathbb{1}_{A_i}(k)\right) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^k}f(k)$$

  donc la formule est vérifiée pour les fonctions étagées positives.

  - Enfin, soit $f\in\mathscr{L}_0((\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),(\mathbb{R}^+,\mathscr{B}(\mathbb{R}^+))$ une fonction borélienne positive. Alors il existe une suite croissante de fonctions étagées positives $(f_n)_n$ tell que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)\to f(x)$. Alors, par le théorème de Beppo-Levi,

$$\int_{\mathbb{R}}^* f_n\,d\mu = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^k}f_n(k)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_{\mathbb{R}}^* f\,d\mu$$

[1]. On peut justifier le passage de la premuère à la deuxième ligne en utilisant le théorème de Fubini par rapport à la mesure de comptage

Mais alors, en particulier, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2^k} f_n(k) \to \frac{1}{2^k} f(k)$. Autrement dit, la suite de fonctions

$$g_n : k \in \mathbb{N} \mapsto \frac{1}{2^k} f_n(k) \in \mathbb{R}$$

est une suite de fonctions positives, mesurables de $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, et qui converge simplement vers $g(k) = \frac{1}{2^k} f(k)$; de plus, c'est une suite croissante puisque $(f_n(x))_n$ est croissante pour tout $x \in \mathbb{R}$.
D'après le théorème de Beppo-Levi appliquée à la mesure de comptage $\mu_{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$, on a donc

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} f_n(k) = \int_{\mathbb{N}}^* g_n d\mu_{\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{N}}^* g d\mu_{\mathbb{N}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} f(k)$$

donc

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} f_n(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} f(k)$$

Par unicité de la limite, on conclut que

$$\int_{\mathbb{R}}^* f d\mu = \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} f(k).$$

2. On calcule $\mu(\{0,1,2\}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \underbrace{\delta_k(\{0,1,2\})}_{=0 \text{ si } k>2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2}\right) = \frac{7}{8}$

   Deuxièmement, $\mu(\{0,n\}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \underbrace{\delta_k(\{0,n\})}_{=0 \text{ si } k\neq 0,n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$

   Troisièmement, $\mu(\mathbb{N}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \underbrace{\delta_k(\mathbb{N})}_{=1} = 1$.

   Enfin, puisque μ est une mesure finie, $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = \mu(\mathbb{R}) - \mu(\mathbb{N}) = 1 - 1 = 0$.

3. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $[0,n] \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ donc $f_n \in \mathscr{L}_0((\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. L'ensemble des points de discontinuité de f_n est $\{0,n\}$, et on a calculé que $\mu(\{0,n\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} > 0$, donc f_n n'est pas continue μ-presque partout.

4. Montrons que $(f_n)_n$ converge simplement vers $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$.

   D'une part, si $x < 0$, on a $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = f(x)$.

   D'autre part, si $x \geq 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \leq n_0$ [2]. Mais alors, pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq x \leq n_0 \leq n$ donc $x \in [0,n]$, donc $f_n(x) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = f(x)$.

   $\rightsquigarrow$ $(f_n)_n$ converge simplement vers f.

   On va utiliser le théorème de Beppo Levi. Montrons que la suite $(f_n)_n$ est croissante, i.e. que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, on a en effet :

$$\begin{cases} \text{si } x < 0, \ f_n(x) = f_{n+1}(x) = 0 \\ \text{si } 0 \leq x \leq n, \ f_n(x) = f_{n+1}(x) = 1 \\ \text{si } n < x \leq n+1, \ f_n(x) = 0 < 1 = f_{n+1}(x) \\ \text{si } x > n+1, \ f_n(x) = f_{n+1}(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \text{ dans tous les cas.}$$

2. Par exemple, $n_0 = E(x) + 1$

On peut donc appliquer le théorème de Beppo Levi :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}^{*} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}}^{*} \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}}^{*} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} d\mu = 1$$

5. g est continue sur $\mathbb{R}$, donc borélienne. Soit $p \geq 1$, on calcule

$$\int_{\mathbb{R}}^{*} |g|^p d\mu = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}|g(k)|^p = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}\left(\frac{3}{2}\right)^{kp} = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{3^p}{2^{p+1}}\right)^k$$

$\rightsquigarrow$ C'est la somme d'une suite géométrique : elle converge ssi

$$\frac{3^p}{2^{p+1}} < 1 \iff \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^p < 1 \iff p\ln(\frac{3}{2}) < \ln(2) \iff \boxed{p < \frac{\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})}}$$

On conclut que $g \in \mathscr{L}^p(\mu)$ ssi $p \in \left[1, \frac{\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})}\right[$.

Partie 2 : Calcul différentiel

Exercice 2 1. Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que fg est C^1 sur U et que, pour tout $x \in U$,

$$\nabla(fg)(x) = f(x)\nabla g(x) + g(x)\nabla f(x)$$

2. Justifier que $V = \{x \in U, f(x) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $1/f$ est C^1 sur U et que, pour tout $x \in V$,

$$\nabla\left(\frac{1}{f}\right)(x) = -\frac{1}{f^2(x)}\nabla f(x)$$

Corrigé :

1. Notons $\varphi : x \in U \mapsto f(x)g(x) \in \mathbb{R}$.

   Méthode 1 : Par composition. On pose $\pi : (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto ab \in \mathbb{R}$. Alors π est bilinéaire continue, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et on a

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 d\pi(a,b)(h_1,h_2) = ah_2 + bh_1.$$

   $\rightsquigarrow$ On en déduit que $\varphi = \pi \circ (f,g)$ est une composée d'application C^1, donc elle est C^1.

   D'autre part, par la formule de composition des différentielles, on a, pour tout $x \in U$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} d\varphi(x)(h) &= d\pi(f(x),g(x))(df(x)(h), dg(x)(h)) \\ &= f(x)dg(x)(h) + g(x)df(x)(h) \\ &= f(x)\langle\nabla g(x), h\rangle + g(x)\langle\nabla f(x), h\rangle \\ &= \langle f(x)\nabla g(x) + g(x)\nabla f(x), h\rangle \end{aligned}$$

   $\rightsquigarrow$ Par définition du gradient, on en déduit que $\nabla\varphi(x) = f(x)\nabla g(x) + g(x)\nabla f(x)$.

Méthode 2 : Par calcul direct. Soient $x \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x+h \in U$. Alors, puisque f et g sont C^1, on a

$$f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + R_f(h) \text{ avec } \frac{|R_f(h)|}{\|h\|} \xrightarrow[h\to 0_{\mathbb{R}^n}]{} 0$$
$$g(x+h) = g(x) + dg(x)(h) + R_g(h) \text{ avec } \frac{|R_g(h)|}{\|h\|} \xrightarrow[h\to 0_{\mathbb{R}^n}]{} 0$$

donc on peut calculer

$$\begin{aligned}\varphi(x+h) &= f(x+h)g(x+h) = (f(x)+df(x)(h)+R_f(h))(g(x)+dg(x)(h)+R_g(h)) \\ &= \underbrace{f(x)g(x)}_{=\varphi(x)} + \underbrace{f(x)dg(x)(h)+g(x)df(x)(h)}_{L(h)} + \underbrace{R_f(h)g(x+h)+R_g(h)f(x+h)}_{R(h)}\end{aligned}$$

avec $L = f(x)dg(x) + g(x)df(x)$ linéaire, puisque c'est une combinaison linéaire des applications linéaires $df(x)$ et $dg(x)$; et d'autre part,

$$\frac{|R(h)|}{\|h\|} \leq \underbrace{\frac{|R_f(h)|}{\|h\|}}_{\to 0} \underbrace{|g(x+h)|}_{\to g(x)} + \underbrace{\frac{|R_g(h)|}{\|h\|}}_{\to 0} \underbrace{|f(x+h)|}_{\to f(x)} \xrightarrow[h\to 0_{\mathbb{R}^n}]{} 0$$

donc φ est différentiable et $d\varphi(x) = f(x)dg(x) + g(x)df(x)$. Or f et g sont C^1, donc C^0, et d'autre part, $x \mapsto df(x)$ et $x \mapsto dg(x)$ sont contiues puisque f et g sont C^1. Donc $x \in U \mapsto d\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est continue comme somme et produit de fonctions continues, autrement dit φ est C^1.

Enfin, par définition du gradient, $df(x)(h) = \langle \nabla f(x), h\rangle$, $dg(x)(h) = \langle \nabla g(x), h\rangle$ donc

$$\begin{aligned}d\varphi(x)(h) &= f(x)dg(x)(h) + g(x)df(x)(h) \\ &= f(x)\langle \nabla g(x), h\rangle + g(x)\langle \nabla f(x), h\rangle \\ &= \langle f(x)\nabla g(x) + g(x)\nabla f(x), h\rangle\end{aligned}$$

donc $\nabla\varphi(x) = f(x)\nabla g(x) + g(x)\nabla f(x)$.

2. La fonction f est C^1, donc continue. D'autre part, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (c'est le complémentaire de $\{0\}$ qui est un fermé), donc $V = f^{-1}(\mathbb{R}\setminus 0\}$ est un ouvert de U. C'est donc l'intersection d'un ouvert O de $\mathbb{R}^n$ avec U : donc $V = U \cap O$ est une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$, donc c'est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

   Notons $\psi : x \in V \mapsto \frac{1}{f(x)} \in \mathbb{R}$. Remarquons que $\psi = i \circ f$ où $i : t \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{t} \in \mathbb{R}^*$ est C^1.

   Donc ψ est C^1 sur V comme composée d'applications C^1. Calculons $d\psi(x)$.

   Notons d'abord que, d'après le lien dérivée-différentielle pour les applications d'une variable, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, pour tout $k \in \mathbb{R}$,

$$di(t)(k) = i'(x)k = -\frac{k}{t^2}$$

   Donc, pour tout $x \in V$, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}d\psi(x)(h) &= di(f(x)) \circ df(x)(h) = i'(f(x))df(x)(h) = -\frac{df(x)(h)}{f^2(x)} \\ &= -\frac{\langle \nabla f(x), h\rangle}{f^2(x)} = \langle -\frac{\nabla f(x)}{f^2(x)}, h\rangle\end{aligned}$$

   d'où, par définition du gradient, $\nabla\psi(x) = -\frac{\nabla f(x)}{f^2(x)}$, comme souhaité.

Exercice 3 1. Soient $\phi_1, \phi_2 : U \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux applications C^1 sur un ouvert $U \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que l'application $M \in U \mapsto \phi_1(M)\phi_2(M)$ est différentiable, et donner sa différentielle.

2. Justifier que $Gl_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(M) \neq 0\}$ est un ouvert.

3. On admet que $\iota : M \in Gl_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1}$ est C^1 sur $Gl_n(\mathbb{R})$. En utilisant $\iota(M)M = I_n$ et (1), montrer que $d\iota(M)(H) = -M^{-1}HM^{-1}$.

Corrigé :

1. Notons $\Phi : M \in U \mapsto \phi_1(M)\phi_2(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Méthode 1 : Par composition. On pose $\Pi : (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors Π est bilinéaire continue, donc de classe C^1 sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, et on a

   $$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \forall (H_1, H_2) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 d\Pi(A, B)(H_1, H_2) = AH_2 + H_1B.$$

   $\rightsquigarrow$ On en déduit que $\Phi = \Pi \circ (\phi_1, \phi_2)$, qui est une composée d'application C^1, est C^1.

   Et d'autre part, par la formule de composition des différentielles, on a, pour tout $M \in U$ et pour tout $H \in \mathbb{R}^n$

   $$\begin{aligned} d\Phi(M)(H) &= d\Pi(\phi_1(M), \phi_2(M))(d\phi_1(M)(H), d\phi_2(M)(H)) \\ &= \phi_1(M)d\phi_2(M)(H) + d\phi_1(M)(H)\phi_2(M) \end{aligned}$$

   Méthode 2 : Par calcul direct. Soient $M \in U$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M + H \in U$. Alors, puisque ϕ_1 et ϕ_2 sont C^1, on a

   $$\phi_1(M + H) = \phi_1(M) + d\phi_1(M)(H) + R_{\phi_1}(H) \text{ avec } \frac{\|R_{\phi_1}(H)\|}{\|H\|} \xrightarrow[H\to 0]{} 0$$
   $$\phi_2(M + H) = \phi_2(M) + d\phi_2(M)(H) + R_{\phi_2}(H) \text{ avec } \frac{\|R_{\phi_2}(H)\|}{\|H\|} \xrightarrow[H\to 0]{} 0$$

   donc on peut calculer

   $$\begin{aligned} \Phi(M + H) &= \phi_1(M + H)\phi_2(M + H) \\ &= (\phi_1(M) + d\phi_1(M)(H) + R_{\phi_1}(H))(\phi_2(M) + d\phi_2(M)(H) + R_{\phi_2}(H)) \\ &= \underbrace{\phi_1(M)\phi_2(M)}_{=\Phi(M)} + \underbrace{\phi_1(M)d\phi_2(M)(H) + d\phi_1(M)(H)\phi_2(M)}_{L(H)} \\ &+ \underbrace{R_{\phi_1}(H)\phi_2(M + H) + R_{\phi_2}(H)\phi_1(M + H)}_{R(H)} \end{aligned}$$

   avec $L : H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \phi_1(M)d\phi_2(M)(H) + d\phi_1(M)(H)\phi_2(M)$ linéaire ; et d'autre part,

   $$\frac{\|R(H)\|}{\|H\|} \leq \underbrace{\frac{\|R_{\phi_1}(H)\|}{\|H\|}}_{\to 0} \underbrace{\|\phi_2(M + H)\|}_{\to\|\phi_2(M)\|} + \underbrace{\frac{\|R_{\phi_2}(H)\|}{\|H\|}}_{\to 0} \underbrace{\|\phi_1(M + H)\|}_{\to\|\phi_1(M)\|} \xrightarrow[H\to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}]{0}$$

   donc Φ est différentiable et $d\Phi(M) = \phi_1(M)d\phi_2(M) + d\phi_1(M)\phi_2(M)$. Or ϕ_1 et ϕ_2 sont C^1, donc C^0, et d'autre part, $M \mapsto d\phi_1(M)$ et $M \mapsto d\phi_2(M)$ sont continues puisque ϕ_1 et ϕ_2 sont C^1. Donc $M \in U \mapsto d\Phi(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ est continue comme somme et produit de fonctions continues, autrement dit Φ est C^1.

2. La fonction $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ est polynomiale, donc continue. D'autre part, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (c'est le complémentaire de $\{0\}$ qui est un fermé), donc $Gl_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus 0\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est donc un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. On va appliquer 1. avec $\phi_1 = \iota$ d'une part, et d'autre part $\phi_2 : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, autrement dit $\phi_2 = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

   $\rightsquigarrow$ Alors ϕ_1 et ϕ_2 sont C^1 sur l'ouvert $Gl_n(\mathbb{R})$. On pose, comme en 1., $\Phi : M \in Gl_n(\mathbb{R}) \mapsto \phi_1(M)\phi_2(M)$.

   D'une part, remarquons que pour tout $M \in Gl_n(\mathbb{R})$, $\Phi(M) = \phi_1(M)\phi_2(M) = M^{-1}M = I_n$, donc Φ est constante sur $Gl_n(\mathbb{R})$. Et donc, pour tout $M \in Gl_n(\mathbb{R})$,pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
   $$d\Phi(M)(H) = 0$$

   Mais d'autre part, d'après 1., , pour tout $M \in Gl_n(\mathbb{R})$,pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

   $$d\Phi(M)(H) = \phi_1(M)d\phi_2(M)(H)+d\phi_1(M)(H)\phi_2(M) = M^{-1}d\phi_2(M)(H)+d\iota(M)(H)M$$

   Or, $\phi_2 = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ est linéaire, donc $d\phi_2(M)(H) = \phi_2(H) = H$, donc au total

   $$d\Phi(M)(H) = M^{-1}H + d\iota(M)(H)M = 0$$

   autrement dit

   $$d\iota(M)(H)M = -M^{-1}H \text{ i.e. } d\iota(M)(H) = -M^{-1}HM^{-1}$$

   comme souhaité.

Exercice 4 On considère l'équation suivante dans $\mathbb{R}^3$:

$$(\star) \quad z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} = \cos(x - y + z)$$

1. Montrer qu'il existe une fonction $\mathscr{C}^1$ $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie sur un voisinage U de $(0,0)$, telle que

   $$(x, y, z) \in U \times \varphi(U) \text{ est solution de } (\star) \iff (x, y) \in U, z = \varphi(x, y)$$

2. Donner $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)$.

Corrigé :

1. Posons $F(x, y, z) = z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} - \cos(x - y + z)$. Alors F est C^1 sur $\mathbb{R}^3$ comme somme et composée d'applications C^1 et, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

   $$\begin{aligned} Jac\,F(x,y,z) = (-e^{z-x-y^2} - \sin(x-y+z), -2ye^{z-x-y^2} + \sin(x-y+z),\\ 3z^2 + 2 + e^{z-x-y^2} - \sin(x-y+z)) \end{aligned}$$

   De plus, $F(0,0,0) = 0$ et

   $$Jac\,F(0,0,0) = (\underbrace{-1, 0}_{D_{x,y}F}, \underbrace{3}_{D_zF})$$

où $D_zF(0,0,0) : h \mapsto 3h$ est inversible.

$\rightsquigarrow$ D'après le théorème des fonctions implicites, il existe U voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, V voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et $\varphi : U \to V$ une fonction C^1 telle que

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in U \times V \text{ est solution de } (\star) &\iff ((x,y,z) \in U \times V, F(x,y,z) = 0)\\ &\iff ((x,y) \in U, z = \varphi(x,y))\end{aligned}$$

2. On a
$$D\varphi(x,y) = -D_zF(x,y,\varphi(x,y))^{-1}D_zF(x,y,\varphi(x,y))$$
donc
$$Jac\ \varphi(0,0) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)\right) = -\frac{1}{3}(-1,0)$$
d'où finalement $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{3}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0) = 0$.