Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2021-2022
Compléments de calcul intégral et différentiel

Examen de deuxième session - 29 juin 2022

Durée : 2h.
Les exercices sont indépendants, et pevent être traités dans n'importe quel ordre.
La précision de l'argumentation sera une part importante dans l'évaluation.
Montrez-moi ce que vous savez faire !

Partie 1 : Calcul intégral

Soit $a \in \mathbb{R}$. On rappelle que la mesure de Dirac en a, δ_a sur $(\mathbb{R}, \mathscr{P}(\mathbb{R}))$ est définie par

$$\delta_a : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{1}_A(a)$$

Exercice 1 On se place dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et on définit

$$\mu : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \delta_k(B)$$

1. Montrer que μ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et que, pour toute fonction borélienne positive f,
$$\int_{\mathbb{R}}^* f d\mu = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} f(k)$$
2. Calculer $\mu(\{0, 1, 2\}), \mu(\{0, n\}), \mu(\mathbb{N}), \mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$.
3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n = \mathbb{1}_{[0,n]}$ est borélienne. Est-elle continue μ-presque partout ?
4. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction à déterminer, puis calculer
$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}}^* f_n d\mu.$$
5. Justifier que $g : x \mapsto \exp(x \ln(\frac{3}{2}))$ est borélienne, puis déterminer les $p \in [1, +\infty[$ tels que $g \in \mathscr{L}^p(\mu)$.

Partie 2 : Calcul différentiel

Exercice 2

1. Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que fg est C^1 sur U et que, pour tout $x \in U$,
$$\nabla(fg)(x) = f(x)\nabla g(x) + g(x)\nabla f(x)$$
2. Justifier que $V = \{x \in U, f(x) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $1/f$ est C^1 sur U et que, pour tout $x \in V$,
$$\nabla \left(\frac{1}{f}\right)(x) = -\frac{1}{f^2(x)} \nabla f(x)$$

Suite au verso ⟳

Exercice 3

1. Soient $\phi_1, \phi_2 : U \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux applications C^1 sur un ouvert $U \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que l'application $M \in U \mapsto \phi_1(M)\phi_2(M)$ est différentiable, et donner sa différentielle.
2. Justifier que $Gl_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(M) \neq 0\}$ est un ouvert.
3. On admet que $\iota : M \in Gl_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1}$ est C^1 sur $Gl_n(\mathbb{R})$. En utilisant $\iota(M)M = I_n$ et (1), montrer que $d\iota(M)(H) = -M^{-1}HM^{-1}$.

Exercice 4 On considère l'équation suivante dans $\mathbb{R}^3$:

$$(\star) \quad z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} = \cos(x - y + z)$$

1. Montrer qu'il existe une fonction $\mathscr{C}^1$ $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie sur un voisinage U de $(0,0)$, telle que

$$(x, y, z) \in U \times \varphi(U) \text{ est solution de}(\star) \iff (x, y) \in U, z = \varphi(x, y)$$

2. Donner $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0)$.