Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2020-2021
Compléments de calcul intégral et différentiel

CC1 - Sujet A

Durée : 45min.

Exercice 1 1. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on note $GL_n(\mathbb{R}) \subset E$ l'ouvert des matrices inversibles.
On rappelle que l'application

$$\mathcal{I} : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$$
$$A \mapsto A^{-1}$$

est différentiable, de différentielle $DI(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}$.
On considère l'application

$$F : A \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto A^{-2} \in E$$

Montrer que F est différentiable et calculer sa différentielle.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On pose

$$g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(y, x) \in \mathbb{R}$$

Donner les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

Exercice 2 On considère le système d'équations

$$(\star) \begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 & = a \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2 & = b \\ x + y + z & = c \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tous (a, b, c) tels que $|a| < r, |b| < r$ et $|c| < r$, il existe une unique solution de $(\star)$ dans un voisinage de $(0, 1, -1)$.

On note $G(a, b, c)$ cette unique solution. Justifier que G est différentiable en $0_{\mathbb{R}^3}$ et donner sa différentielle.

Exercice 3 Considérons l'application

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$$
$$(v, x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(v) + \sin(x) + \tan(y) - z - 1 \\ e^v + x - y - e^{-z} \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe deux voisinages U, V de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ fonction $\phi : U \to V$ telle que

$$(v, x, y, z) \in U \times V \text{ et } F(v, x, y, z) = (0, 0) \iff (v, z) \in U \text{ et } (x, y) = \phi(v, z).$$

Donner la différentielle de ϕ sur U.