CCID - CC1 - Sujet A

Exercice 1

1. $F : A \in GL_n(\mathbb{R}) \longmapsto A^{-2} \in M_n(\mathbb{R})$

On remarque que $F = Q \circ I$ où $Q : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^2 \end{array}$

$\rightarrow$ Q est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$: soient $A, H \in M_n(\mathbb{R})$ alors

$$Q(A+H) = (A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2$$
$$= Q(A) + L(H) + R(H)$$

où $L : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ H & \longmapsto & AH+HA \end{array}$ est linéaire.

et $\dfrac{\|R(H)\|}{\|H\|} = \dfrac{\|H^2\|}{\|H\|} \leq \dfrac{\|H\|^2}{\|H\|} = \|H\| \xrightarrow[H \to 0]{} 0$

donc Q est différentiable de différentielle

$$DQ(A)(H) = AH + HA$$

$\rightarrow$ F est donc différentiable sur $GL_n(\mathbb{R})$ comme composée d'applications différentiables, et, pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$,

$$DF(A)(H) = DQ(I(A)) \circ DI(A)(H)$$
$$= DQ(A^{-1})(-A^{-1}HA^{-1})$$

d'où $DF(A)(H) = -A^{-2}HA^{-1} - A^{-1}HA^{-2}$

2. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $g = f \circ L$ où $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto f(y,x)$ $\qquad$ $(x,y) \longmapsto (y,x)$.

$\rightarrow$ L est linéaire, donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et

$$DL(x,y) = L \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

donc $\mathrm{Jac}_L(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice de L dans la base canonique)

$\rightarrow$ g est différentiable comme composée d'applications différentiables et, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathrm{Jac}_g(x,y) = \mathrm{Jac}_f(\underbrace{y,x}_{=L(x,y)})\, \mathrm{Jac}_L(x,y)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(y,x), \frac{\partial f}{\partial y}(y,x)\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y,x), \frac{\partial f}{\partial x}(y,x)\right)$$

D'où $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x) \\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x). \end{cases}$

<u>Exercice 2</u> Notons $F : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x^3+y^3+z^3, x^2+y^2+z^2-2, x+y+z) \in \mathbb{R}^3$

F est polynomiale, donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$

et $F(0,1,-1) = (0,0,0)$.

De plus, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Jac}_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

donc $\mathrm{Jac}_F(0,1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\det \mathrm{Jac}_F(0,1,-1) = -12 \neq 0$

$\rightarrow$ $DF(0,1,-1)$ est inversible donc, par le théorème d'inversion locale, il existe U voisinage de $(0,1,-1)$ et V voisinage de $(0,0,0)$ tq $F_{|U} : U \longrightarrow V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Exercice 2 (fin)

Puisque V est un voisinage de $(0,0,0)$, il existe $r>0$ tq $B_\infty(O_{\mathbb{R}^3},r) \subset V$. Alors, $\forall (a,b,c) \in B_\infty(O_{\mathbb{R}^3},r)$, $F^{-1}(a,b,c)$ est l'unique solution de $(*)$ dans U.

Donc, $\forall a,b,c$ tq $|a|<r$, $|b|<r$ et $|c|<r$, il existe un unique $(x,y,z) = G(a,b,c) = F^{-1}(a,b,c)$ solution de $(*)$ dans U

De plus, puisque F_U est un $\mathcal{C}^1$-difféo local au voisinage de $(0,1,-1)$, $G = F^{-1}$ est $\mathcal{C}^1$ sur V, en particulier G est différentiable en $(0,0,0)$ et $DG(O_{\mathbb{R}^3}) = DF(0,1,-1)^{-1}$

On peut calculer $\mathrm{Jac}_G(0,0,0) = \cancel{\tfrac{1}{6}} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3

$$F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(v,x,y,z) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos v + \sin x + \tan y - z - 1 \\ e^v + x - y - e^{z} \end{pmatrix}$$

Alors F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^4$ et

$$\mathrm{Jac}_F(v,x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sin v & \cos x & \frac{1}{\cos^2 y} & -1 \\ e^v & 1 & -1 & e^{-z} \end{pmatrix}$$

$D_{(v,z)}F(0,0,0,0)$

$F(0,0,0,0) = (0,0)$ et $\mathrm{Jac}_F(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$D_{(x,y)}F(0,0,0,0)$

$\rightarrow D_{(x,y)}F(0,0,0,0)$ est inversible donc, par le théorème des fonctions implicites, il existe U, V voisinages de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \longrightarrow V$ telle que

$(v,z,x,y) \in U \times F$ $\iff$ $(v,z) \in U$ et $(x,y) = \varphi(v,z)$
$F(v,x,y,z) = (0,0)$

De plus, φ est $\mathcal{C}^1$ et $D\varphi(0,0) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

et pour tout $(v,z) \in U$, on a

$$D\varphi(v,z) = - D_{(x,y)}F(v, \varphi(v,z), z)^{-1} D_{(v,z)}F(v, \varphi(v,z), z)$$

$$= - \frac{1}{-\cos\varphi_1 + \frac{1}{\cos^2\varphi_2}} \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{\cos^2(\varphi_2(v,z))} \\ -1 & \cos(\varphi_1(v,z)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin v & -1 \\ e^{v} & e^{-z} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\cos^2(\varphi_2(v,z))}{\cos^3(\varphi_1(v,z)) - 1} \begin{pmatrix} \sin v - \frac{e^{v}}{\cos^2\varphi_2} & 1 - \frac{e^{-z}}{\cos^2\varphi_2} \\ \sin v + e^{z}\cos\varphi_1 & 1 + e^{-z}\cos\varphi_1 \end{pmatrix}$$