Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2020-2021
Compléments de calcul intégral et différentiel

CC1 - Sujet B

Durée : 45min.

Exercice 1

1. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'application
$$F : (A, B) \in E \times E \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB) \in \mathbb{R}$$
Montrer que F est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On pose
$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, -x) \in \mathbb{R}$$
Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.

Exercice 2 On considère le système d'équations

$$(\star)\begin{cases} xy^2 - 1 & = a \\ 2y - 1 - x & = b \\ yz^2 - 1 & = c \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tous (a, b, c) tels que $|a| < r, |b| < r$ et $|c| < r$, il existe une unique solution de $(\star)$ dans un voisinage de $(1, 1, 1)$.

On note $G(a, b, c)$ cette unique solution. Justifier que G est différentiable en $0_{\mathbb{R}^3}$ et donner sa différentielle.

Exercice 3 Considérons l'application

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^5 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z, u, v) &\mapsto \begin{pmatrix} xy^2 + xzu + yu^2 - 3 \\ u^3yz + 2xv - u^2v - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Montrer qu'il existe un voisinage U de $(1, 1, 1)$, un voisinage V de $(1, 1)$ et une fonction $\phi : U \to V$ telle que, pour tout $(x, y, z) \in U$,

$$F(x, y, z, \phi(x, y, z)) = (0, 0).$$

Calculer $D\phi(1, 1, 1)$.