CCID - CC1 - Sujet B

Exercice 1

1) $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad (A, B) \longmapsto tr({}^tAB)$

Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On remarque que $F = tr \circ \mathcal{B}$ où $\mathcal{B} : E \times E \longrightarrow E$
$\quad (A,B) \longmapsto {}^tAB$

De plus • $\mathcal{B}$ est différentiable sur $E \times E$:
$\forall (A,B), (H_1, H_2)$ on a

$$\mathcal{B}(A+H_1, B+H_2) = {}^t(A+H_1)(B+H_2) = ({}^tA + {}^tH_1)(B+H_2)$$
$$= {}^tAB + {}^tH_1B + {}^tAH_2 + {}^tH_1H_2$$
$$= \mathcal{B}(A,B) + L(H_1,H_2) + R(H_1,H_2)$$

où $L : E \times E \longrightarrow E$ est linéaire
$\quad (H_1, H_2) \longmapsto {}^tH_1B + {}^tAH_2$

et
$$\frac{\|R(H_1,H_2)\|}{\|(H_1,H_2)\|} \leq \frac{\|{}^tH_1\| \|H_2\|}{\|(H_1,H_2)\|} \leq \frac{\|(H_1,H_2)\|^2}{\|(H_1,H_2)\|} = \|(H_1,H_2)\| \xrightarrow[(H_1,H_2)\to(0,0)]{} 0$$

donc $\mathcal{B}$ est différentiable et $D\mathcal{B}(A,B)(H_1,H_2) = {}^tH_1B + {}^tAH_2$

• $tr : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire, donc différentiable sur E et, $\forall M \in E$, $D\,tr(M) = tr$.

→ Donc F est différentiable comme composée d'applications différentiables et, $\forall (A,B) \in E \times E$, $\forall (H_1,H_2) \in E \times E$

$$DF(A,B)(H_1,H_2) = D\,tr({}^tAB) \circ D\mathcal{B}(A,B)(H_1,H_2)$$
$$= tr({}^tH_1B + {}^tAH_2)$$

2. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow g = f \circ L$ où $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$x \longmapsto f(x,-x)$ $\quad\quad x \longmapsto (x,-x)$

Alors L est linéaire, donc différentiable et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$DL(x) = L.$$

g est donc différentiable sur $\mathbb{R}$ comme composée d'applications différentiables. De plus

$$\begin{aligned} Jac_g(x) &= Jac_g f(x,-x) \cdot Jac_x L \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x), \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)\right) \end{aligned}$$

D'après le lien dérivée-différentielle, on en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$.

<u>Exercice 2</u> Notons $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longmapsto (xy^2-1, 2y-1-x, yz^2-1)$$

F est polynomiale, donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$Jac_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & z^2 & 2yz \end{pmatrix}$$

Donc, $Jac_F(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\det Jac_F(1,1,1) = 4 \neq 0$

$\rightsquigarrow F(1,1,1) = (0,0,0)$ et $DF(1,1,1)$ est inversible donc, par le théorème d'inversion locale, il existe U voisinage de $(1,1,1)$ et V voisinage de $(0,0,0)$ tq $F_{|U} : U \longrightarrow V$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Il existe donc $r > 0$ tq $B_\infty(0_{\mathbb{R}^3}, r) \subset V$. Alors, $\forall (a,b,c)$ tq $|a| < r, |b| < r, |c| < r$, (ie $(a,b,c) \in B_\infty(0_{\mathbb{R}^3}, r)$), $F_{|U}^{-1}(a,b,c)$ est l'unique solution de $(*)$ dans U.

On note $G = F_{|U}^{-1}$. Puisque $F_{|U} : U \longrightarrow V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféo,

G est $\mathcal{C}^1$ sur V. En particulier, G est différentiable B-2
en (0,0,0) et $DG(0,0,0) = DF(1,1,1)^{-1}$

On peut alors calculer

$$Jac_G(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

$$F : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z,u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} xy^2 + xzu + yu^2 - 3 \\ u^3yz + 2xv - u^2v - 2 \end{pmatrix}$$

Alors F est polynomiale, donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^5$ et

$$Jac_F(x,y,z,u,v) = \begin{pmatrix} y^2+zu & 2xy+u^2 & xu & xz+2uy & 0 \\ 2v & u^3z & u^3y & 3u^2yz+2uv & 2x-u^2 \end{pmatrix}$$

On a $F(1,1,1,1,1) = (0,0)$ et

$$Jac_F(1,1,1,1,1) = \left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}}}_{D_{(x,y,z)}F(1,1,1,1,1)} \; \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}}}_{D_{(u,v)}F(1,1,1,1,1)} \right)$$

→ $D_{(u,v)}F(1,1,1,1,1)$ est inversible, donc, par le théorème des fonctions implicites, il existe U voisinage de $(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$
V —— $(1,1)$ —— $\mathbb{R}^2$
$\varphi : U \longrightarrow V$ $\mathcal{C}^1$

tels que $\begin{matrix}(x,y,z,u,v) \in U\times V \\ F(x,y,z,u,v) = (0,0)\end{matrix} \iff \begin{matrix}(x,y,z) \in U \text{ et} \\ (u,v) = \varphi(x,y,z)\end{matrix}$

En particulier, $\forall (x,y,z) \in U$,
$$F(x,y,z,\varphi(x,y,z)) = (0,0).$$

De plus, $D\varphi(1,1,1) = -D_{(u,v)}F(1,1,1,1,1)^{-1} D_{(x,y,z)}F(1,1,1,1,1)$
$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$