Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2020-2021
Compléments de calcul intégral et différentiel

CC1 - Sujet C

Durée : 45min.

Exercice 1 1. Soient $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ trois applications différentiables sur $\mathbb{R}^2$. On pose

$$F : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(g(x, y), h(x, y))$$

Donner les dérivées partielles de F en fonction de celles de f, g, h.

2. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Fixons $A \in E$ et considérons l'application

$$F : M \in E \mapsto MAM \in E$$

Montrer que F est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 2 On considère le système d'équations

$$(\star) \begin{cases} x^2 - xy & = u \\ y - x & = v \end{cases}$$

Trouver une condition sur (x_0, y_0) pour qu'il existe un voisinage U de (x_0, y_0) et un voisinage V de $(x_0^2 - x_0y_0, y_0 - x_0)$ tels que, pour tout $(u, v) \in V$, il existe une unique solution (x, y) de $(\star)$ dans U.

On note $\Psi(u, v)$ cette unique solution. Justifier que Ψ est différentiable sur V.

Exercice 3 Posons

$$G : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2} - \cos(z) \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer qu'il existe un voisinage U de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une application $\mathscr{C}^1$ $\varphi : U \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, z) \in U$, $G(x, \varphi(x, z), z) = 0$.
   Donner la différentielle de φ sur U en fonction de (x, z) et $\varphi(x, z)$.
2. Existe-t-il une application ψ de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un voisinage V de $(0, 1)$ telle que, pour tout $(x, y) \in V$, $G(x, y, \psi(x, y)) = 0$?