CCID - Sujet C - CC1

Exercice 1

1) $f, g, h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiables

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(g(x,y), h(x,y))$$

Posons $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ alors $F = f \circ \Phi$
$$(x,y) \longmapsto (g(x,y), h(x,y))$$

De plus : Φ est différentiable car ses 2 composantes le sont, et $Jac_{(x,y)}\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$

On en déduit que F est différentiable comme composée d'applications différentiables, et

$$Jac_F(x,y) = Jac_f(\underbrace{g(x,y)}_{a}, \underbrace{h(x,y)}_{b}) \cdot Jac_\Phi(x,y)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\frac{\partial h}{\partial x}(x,y),\right.$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)$$

D'où
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(x,y), h(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(x,y), h(x,y))\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\text{———})\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(\text{———})\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

2. $F : E \longrightarrow E$
$\quad M \longmapsto MAM$

Soit $M \in E$, $H \in E$. On calcule

$$F(M+H) = (M+H)A(M+H) = MAM + MAH + HAM + HAH$$
$$= F(M) + L(H) + R(H)$$

où $L : E \longrightarrow E$ est linéaire
$\quad H \longmapsto MAH + HAM$

et $R(H) = HAH$ vérifie $\dfrac{\|R(H)\|}{\|H\|} \leq \dfrac{\|H\|\|A\|\|H\|}{\|H\|} = \|A\|\|H\| \xrightarrow[H \to 0_E]{} 0$

Donc F est différentiable en M et
$$DF(M)(H) = MAH + HAM$$

Exercice 2

Posons $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. F est polynomiale, donc
$\quad (x,y) \longmapsto (x^2 - xy, y - x)$

$\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $Jac_F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-y & -x \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

donc $\det Jac_F(x,y) = x - y$.

On en déduit que si (x_0, y_0) vérifie $x_0 \neq y_0$, alors
$\det Jac_F(x_0,y_0) \neq 0$ donc $DF(x_0,y_0)$ est inversible.
Par le théorème d'inversion locale, il existe donc dans ce cas
U voisinage de (x_0,y_0) et V voisinage de $F(x_0,y_0)$ tq
$F_{|U} : U \longrightarrow V$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféo.
Alors, $\forall (u,v) \in V$, le système $(*)$ admet une unique solution
$\varphi(u,v) = F_{|U}^{-1}(u,v)$ dans U.
De plus, puisque $F_{|U}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféo sur U, sa réciproque
$\varphi = F_{|U}^{-1}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $V = F(U)$.

Exercice 3

C-2

$$G : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \sqrt{x^2+y^2+2z^2} - \cos(z)$$

1) G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ comme composée et somme de fonctions $\mathcal{C}^1$

et, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$\operatorname{Jac}_G(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+2z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+2z^2}}, \frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+2z^2}} + \sin(z) \right)$$

On a ~~$G(0,0,1) \neq 0$ et~~ $G(0,1,0) = 0$

$\operatorname{Jac}_G(0,1,0) = (0,1,0)$ donc $\frac{\partial G}{\partial y}(0,1,0) = 1 \neq 0$

Par le théorème des fonctions implicites, il existe

U voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \longrightarrow I$ $\mathcal{C}^1$

I —— 1 — $\mathbb{R}$

tels que $\forall (x,z,y) \in U \times I$ $\quad G(x,y,z) = 0 \iff (x,z) \in U$ et $y = \varphi(x,z)$

En particulier, $\forall (x,z) \in U$, $G(x, \varphi(x,z), z) = 0$.

De plus, $\forall (x,z) \in U$, on a

$$D\varphi(x,z) = -\frac{1}{\frac{\partial G}{\partial y}(x,\varphi(x,z),z)} \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x,\varphi(x,z),z), \frac{\partial G}{\partial z}(x,\varphi(x,z),z) \right)$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+y^2+2z^2}}{\varphi(x,z)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+\varphi(x,z)^2+2z^2}}, \frac{2z}{\sqrt{x^2+\varphi(x,z)^2+2z^2}} + \sin(z) \right)$$

$$= \left(\frac{-x}{\varphi(x,z)}, \frac{-2z}{\varphi(x,z)} - \frac{\sin(z)}{\varphi(x,z)} \sqrt{x^2+\varphi(x,z)^2+2z^2} \right)$$

2) $\forall z \in \mathbb{R}$, $G(0,1,z) = \underbrace{\sqrt{1+2z^2}}_{\geq 1} - \underbrace{\cos(z)}_{\leq 1}$

donc $G(0,1,z) = 0$ ssi $z = 0$.

On a alors $Jac_G(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \frac{\partial G}{\partial z}(0,1,0) = 0$ donc on ne peut pas appliquer le TFI

(mais ça ne montre pas que φ n'existe pas !)

Supposons qu'il existe V voisinage de $(0,1)$ et $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\forall (x,y) \in V$, $G(x,y,\varphi(x,y)) = 0$. Alors $\varphi(0,1) = 0$.

Notons $H : V \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto G(x,y,\varphi(x,y))$.

Alors $Jac_H(x,y) = Jac_G(x,y,\varphi(x,y)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix}$

$$= \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial G}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial G}{\partial y}(\text{———}) + \frac{\partial G}{\partial z}(\text{———}) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \right)$$

Mais, $\forall (x,y) \in V$, $H(x,y) = 0$ donc $\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = 0$.

Donc, en particulier,

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x}(0,1) = \underbrace{\frac{\partial G}{\partial x}(0,1,0)}_{=0} + \overbrace{\frac{\partial G}{\partial z}(0,1,0)}^{=0} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,1) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y}(0,1) = \underbrace{\frac{\partial G}{\partial y}(0,1,0)}_{=1} + \underbrace{\frac{\partial G}{\partial z}(0,1,0)}_{=0} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Absurde

On en déduit qu'il n'existe aucune fonction φ vérifiant cette condition.