Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2020-2021
Compléments de calcul intégral et différentiel

CC2 - Sujet A

Durée : 45min.

Question de cours
Donner la définition d'un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1 On considère la courbe d'équation

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

Montrer qu'il existe un voisinage I de 0 dans $\mathbb{R}$, un voisinage J de 0 dans $\mathbb{R}$, et une application $\mathcal{C}^1$ $\varphi : I \to J$ telle que :

$$(x,y) \in \mathcal{C} \cap (I \times J) \iff (x \in I, y = \varphi(x))$$

Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$. En déduire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en $(0,0)$.

Exercice 2 On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel $\langle .,. \rangle$, et on note $\|.\|$ la norme associée.

Soit $v_0 \in S(0,1)$ un vecteur de norme 1. On considère l'application

$$f : u \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle v_0, u \rangle \in \mathbb{R}.$$

1. Justifier qu'il existe deux vecteurs u_{max} et u_{min} de norme 1 tel que, pour tout $v \in S(0,1)$, on a :

$$f(u_{min}) \leqslant f(v) \leqslant f(u_{max})$$

2. Déterminer u_{min} et u_{max}.