LCID - CC2 - Sujet A

Exercice 1.

$$\mathcal{C} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^4+y^3-x^2-y^2+x-y=0\}\subset\mathbb{R}^2$$

Posons $g : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y)\longmapsto x^4+y^3-x^2-y^2+x-y\end{array}$

Alors g est polynomiale, donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et

on a $(x,y)\in\mathcal{C} \iff g(x,y)=0$.

De plus, $g(0,0)=0$ (donc $(0,0)\in\mathcal{C}$)

et, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $Dg(x,y) = (4x^3-2x+1,\ 3y^2-2y-1)$

donc $Dg(0,0) = (1, \underbrace{-1}_{D_y g(0,0)})$ $\left(= \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\right)$

$\rightsquigarrow \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\neq 0$ donc $D_y g(0,0)\in\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est inversible.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe

donc $\underset{J}{I}$ voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et $\varphi : I\longrightarrow J$ $\mathcal{C}^1$

tq $\begin{pmatrix}(x,y)\in I\times J\\ g(x,y)=0\end{pmatrix} \iff (x\in I,\ y=\varphi(x))$

autrement dit, $(x,y)\in\mathcal{C}\cap(I\times J)$ ssi $x\in I$ et $y=\varphi(x)$

- On a $0 \in I \cap J$, $(0,0) \in \mathcal{C} \cap (I \times J)$ donc $\varphi(0) = 0$
- Par le TFI, on a, pour tout $h \in \mathbb{R}$

$$D\varphi(0)(h) = -\left(D_y g(0,\varphi(0))\right)^{-1} \circ D_x g(0,\varphi(0))(h)$$

$$= -\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)} \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \cdot h$$

$$= -\frac{1}{-1} \cdot 1 \cdot h = h$$

D'après le lien dérivée-différentielle pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on en déduit que $\varphi'(0) = 1$

- L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $(0,0)$ est donc

$$y = \varphi(0) + \varphi'(0)x = x.$$

Exercice 2

1) - f est linéaire, donc continue sur $\mathbb{R}^n$
   - $S(0,1)$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$ de dimension finie, donc $S(0,1)$ est compact.

→ On en déduit que f est bornée et atteint ses bornes sur $S(0,1)$. Il existe donc $u_{max}, u_{min} \in S(0,1)$ tq $\forall v \in S(0,1)$

$$f(u_{min}) \leq f(v) \leq f(u_{max})$$

2) $S(0,1) = \{u \in \mathbb{R}^n, \langle u,u \rangle = 1\} = \{u \in \mathbb{R}^n \; g(u) = 0\}$
où $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto \langle u,u \rangle - 1 \end{array}$ est quadratique, donc $\mathcal{C}^1$

et, $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $Dg(u)(h) = 2\langle u,h \rangle$
$= 2 \sum u_i h_i$.

Ex 2 (suite)

On en déduit que, $\forall u \in S(0,1)$, $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ donc
$Dg(u) \neq 0_{(\mathbb{R}^n)^*}$

Donc, par le théorème des extrema liés, si $u \in S(0,1)$ est un extremum de f sur $S(0,1)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $Df(u) = \lambda Dg(u)$, autrement dit,

$$\begin{cases} \langle u, u \rangle = 1 \\ \forall h \in \mathbb{R}^n, \underbrace{Df(u)(h)}_{= f(h) \text{ car } f \text{ linéaire}} = \lambda Dg(u)(h) \end{cases}$$

autrement dit, $\begin{cases} \langle u, u \rangle = 1 & (*) \\ \forall h \in \mathbb{R}^n, \langle v_0, h \rangle = 2\lambda \langle u, h \rangle & (**) \end{cases}$

donc, en utilisant $(**)$, ~~avec~~ on trouve
$\forall h \in \mathbb{R}^n$, $\langle v_0 - 2\lambda u, h \rangle = 0$, ce qui implique $2\lambda u = v_0$
ou encore $\lambda \neq 0$ et $u = \frac{1}{2\lambda} v_0$

Mais alors par $(*)$, on a
$$\langle u, u \rangle = \frac{1}{4\lambda^2} \langle v_0, v_0 \rangle = \frac{1}{4\lambda^2} \|v_0\|^2 = \frac{1}{4\lambda^2} = 1$$

d'où $\lambda^2 = \frac{1}{4}$. Il y a donc 2 possibilités

- $\lambda = \frac{1}{2}$: alors $u = v_0$ et $f(v_0) = \|v_0\|^2 = 1$
- $\lambda = -\frac{1}{2}$: alors $u = -v_0$ et $f(-v_0) = -1$

$\rightarrow$ $f(v_0) > f(-v_0)$

On sait que u_{min} et u_{max} sont des extremas de f sur $S(0,1)$

On en déduit que $u_{min} = -v_0$ et $\forall v \in S(0,1)$
$u_{max} = v_0$

$$-1 \leq \langle v_0, v \rangle \leq 1.$$

Dans $\mathbb{R}^2$: