Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2020-2021
Compléments de calcul intégral et différentiel

CC2 - Sujet B

Durée : 45min.

Question de cours

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert.
Soit $f : U \subset E \to F$ une application, $a \in U$, $v \in E$.
A quelle condition dit-on que f admet une dérivée directionnelle en a dans la direction de v ?

Exercice 1 On considère la courbe d'équation

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ln(x) + \cos(y) - e^{xy} = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

Montrer qu'il existe un voisinage I de 1 dans $\mathbb{R}$, un voisinage J de 0 dans $\mathbb{R}$, et une application $\mathcal{C}^1$ $\psi : I \to J$ telle que :

$$(x, y) \in \mathcal{C} \cap (I \times J) \iff (x \in I, y = \psi(x))$$

Calculer $\psi(1)$ et $\psi'(1)$. En déduire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en $(1, 0)$.

Exercice 2 On considère la parabole

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = 4y\} = g^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^2$$

où $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - 4y \in \mathbb{R}$. On note $u_0 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $(0, 0) \in B(u_0, 2) \cap \mathcal{P}$.
2. Justifier qu'il existe $v_{min} \in \overline{B}(u_0, 2) \cap \mathcal{P}$ tel que :

   $$\forall v \in \overline{B}(u_0, 2) \cap \mathcal{P},\ \|u_0 - v_{min}\| \leqslant \|u_0 - v\|.$$

   Indication : Considérer la fonction $f : v \in \mathbb{R}^2 \to \|u_0 - v\|^2 \in \mathbb{R}$.
3. Justifier que

   $$\forall v \in \mathcal{P},\ \|u_0 - v_{min}\| \leqslant \|u_0 - v\|.$$
4. Déterminer v_{min}.