CCID - CC2 - Sujet B

Exercice 1

$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \overbrace{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}}^{\mathcal{U}} \cancel{\mathbb{R}^2},\ \ln(x) + \cos(y) - e^{xy} = 0\}$

Posons $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \ln(x) + \cos(y) - e^{xy} \end{array}$

Alors g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions usuelles, et

$$(x,y) \in \mathcal{C} \iff g(x,y) = 0.$$

De plus, $g(1,0) = 0$ donc $(1,0) \in \mathcal{C}$

et $\forall (x,y) \in \underset{\mathcal{U}}{\cancel{\mathbb{R}^2}}$, $Dg(x,y) = \left(\frac{1}{x} - ye^{xy},\ -\sin(y) - xe^{xy}\right)$

donc $Dg(1,0) = (1, \underbrace{-1}_{D_y g(1,0)})$

$\leadsto \frac{\partial g}{\partial y}(1,0) \neq 0$ donc $D_y g(1,0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ $\left(= \frac{\partial g}{\partial y}(1,0)\right)$ est inversible.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe donc

I voisinage de 1 dans $\mathbb{R}$

J ——— 0 dans $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \longrightarrow J$ $\mathcal{C}^1$

tq $\begin{pmatrix} (x,y) \in I \times J \\ g(x,y) = 0 \end{pmatrix} \iff (x \in I,\ y = \varphi(x))$

autrement dit, $(x,y) \in \mathcal{C} \cap (I \times J)$ ssi $x \in I$ et $y = \varphi(x)$

* On a $(1,0) \in (I \cap J) \cap \mathcal{C}$ donc $\varphi(1) = 0$
* Par le TFI, on a, pour tout $h \in \mathbb{R}$

$$D\varphi(1)(h) = -\left(D_y g(1,\varphi(1))\right)^{-1} \circ D_x g(1,\varphi(1))(h)$$

$$= - \frac{1}{\underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(1,0)}_{-1}} \cdot \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(1,0)}_{1} \cdot h = h$$

D'après le lien dérivée - différentielle pour les fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on en déduit que $\varphi'(1) = 1$

$\longrightarrow$ L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $(1,0)$ est donc

$$y = \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) = x - 1.$$

Exercice 2

$\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 4y\} \subset \mathbb{R}^2$

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 - 4y \end{array}$$, de sorte que $(x,y) \in \mathcal{P}$ ssi $g(x,y) = 0$.

$u_0 = (0,1)$

1) On a $\begin{cases} \|u_0 - (0,0)\| = 1 < 2 \text{ donc } (0,0) \in B(u_0, 2) \\ (0,0) \in \mathcal{P} \end{cases}$

2) . Considérons

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \underset{(x,y)}{\overset{\shortparallel}{v}} \longmapsto \|u_0 - v\|^2 = x^2 + (y-1)^2 \end{array}$$

Alors f est polynomiale, donc $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$.

. De plus $\overline{B}(u_0, 2)$ est fermé, borné dans $\mathbb{R}^2$ de dimension finie, donc compact

et $\mathcal{P}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$, donc $\mathcal{P} \cap \overline{B}(u_0, 2)$ est un fermé inclus dans $\overline{B}(u_0,2)$ $\longrightarrow$ $\mathcal{P} \cap \overline{B}(u_0, 2)$ est compact

Ex 2 (suite)

$\leadsto$ f est continue sur le compact (non vide par 1.) $\mathcal{P} \cap \overline{B}(u_0,2)$

donc f admet un minimum sur $\mathcal{P} \cap \overline{B}(u_0,2)$

$\rightarrow$ il existe $v_{min} \in \overline{B}(u_0,2) \cap \mathcal{P}$ tq $\forall v \in \overline{B}(u_0,2) \cap \mathcal{P}$

$$f(v_{min}) \leq f(v)$$

ie $\|u_0 - v_{min}\|^2 \leq \|u_0 - v\|^2$

ie $\|u_0 - v_{min}\| \leq \|u_0 - v\|$

3) Soit $v \in \mathcal{P}$, alors 2 cas se présentent

- Soit $v \in \overline{B}(u_0,2)$, alors $\|u_0 - v\| \geq \|u_0 - v_{min}\|$ par 2.
- Soit $v \notin \overline{B}(u_0,2)$, alors $\|u_0 - v\| > 2 \geq \|u_0 - v_{min}\|$

$\rightarrow$ Dans tous les cas, $\|u_0 - v\| \geq \|u_0 - v_{min}\|$

donc v_{min} est un minimum de $f_{|\mathcal{P}}$ sur $\mathcal{P}$.

4) f et g sont polynomiales, donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

et $Dg(x,y) = (2x, \ -4) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Par le théorème des extrema liés, si $u \in \mathcal{P}$ est un extremum de f sur $\mathcal{P}$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} u \in \mathcal{P} \\ Df(u) = \lambda Dg(u) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 4y = 0 \\ 2x = 2\lambda x \\ 2(y-1) = -4\lambda \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(u)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(u)$

$$\iff \begin{cases} x^2 - 4y = 0 & (1) \\ (1-\lambda)x = 0 & (2) \\ y = 1 - 2\lambda & (3) \end{cases}$$

2 possibilités pour (2) : • soit $\lambda = 1$, mais alors $y = -1$ (3), ce qui contredit (1) qui implique $y \geq 0$.

. Soit $x = 0$, alors par (1) $y = 0$

→ On en déduit que le seul point de $\mathcal{D}$ qui puisse être un extrema de $f_{|\mathcal{D}}$ est $(0,0)$

donc, par (3), $\boxed{v_{min} = (0,0)}$