Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2020-2021
Compléments de calcul intégral et différentiel

CC2 - Sujet C

Durée : 45min.

Question de cours

Enoncer le théorème d'inversion globale.

Exercice 1 On considère l'équation suivante sur $\mathbb{R}^2$

$$(\star) \quad y^3 + xy + e^x = 0$$

1. Soit $x_0 \geqslant 0$. Justifier qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que (x_0, y_0) soit solution de $(\star)$.
2. Soit donc (x_0, y_0) une solution telle que $x_0 \geqslant 0$. Montrer qu'il existe un voisinage I de x_0 dans $\mathbb{R}$, un voisinage J de y_0 dans $\mathbb{R}$, et une application $\mathcal{C}^1$ $\phi : I \to J$ telle que :
$$(x, y) \in (I_0 \times J_0) \text{ est solution de } (\star) \iff (x \in I_0, y = \phi(x))$$
3. Calculer $\phi'(x)$ en fonction de x et $\phi(x)$.

Exercice 2 On considère l'ellipse

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

1. Justifier que l'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ admet un minimum et un maximum sur $\mathcal{E}$.
2. Déterminer les points de $\mathcal{E}$ qui sont, respectivement, le plus près et le plus loin de $(0, 0)$.