# CCID - CC2 - Sujet C

## Exercice 1

$(\ast)\quad y^3 + xy + e^x = 0$

1) Soit $x_0 \geq 0$, on considère

$$\varphi_{x_0} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & y^3 + x_0 y + e^{x_0} \end{array}$$

($\rightarrow$ $\varphi_{x_0}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'_{x_0}(y) = 3y^2 + x_0 \geq 0$)

De plus, $\varphi_{x_0}$ est continue et $\begin{cases} \lim\limits_{y \to -\infty} \varphi_{x_0}(y) = -\infty \\ \lim\limits_{y \to +\infty} \varphi_{x_0}(y) = +\infty \end{cases}$

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tq $\varphi_{x_0}(y_0) = f(x_0, y_0) = 0$.

ie $(x_0, y_0)$ est solution de $(\ast)$

2) Posons $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y^3 + xy + e^x \end{array}$

Alors $g$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de polynômes et de fonctions usuelles, et

$(x, y)$ solution de $(\ast) \iff g(x,y) = 0$.

Soit $(x_0, y_0)$ solution de $(\ast)$. On calcule

$$Dg(x_0, y_0) = \left(y_0 + e^{x_0},\ 3y_0^2 + x_0\right)$$

Or, puisque $(x_0, y_0)$ est solution de $(*)$ avec $x_0 \geqslant 0$

on a $y_0^3 + x_0 y_0 + e^{x_0} = 0$ donc $y_0 \neq 0$

donc $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 3y_0^2 + x_0 > 0$

donc $D_y g(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ est inversible.

Par le TFI, il existe donc $I_0$ voisinage de $x_0$ dans $\mathbb{R}$
$J_0$ ——— $y_0$ ———

et $\phi : I \longrightarrow J$ une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que
$(x,y) \in I_0 \times J_0$ solution de $(*)$ ssi $x \in I_0$, $y = \phi(x)$

3) On a de plus, $\forall x \in I$, $\forall h \in \mathbb{R}$

$$D\phi(x)(h) = - D_y g(x, \varphi(x))^{-1} \circ D_x g(x, \varphi(x))(h)$$

$$= - \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))} \frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x)) h$$

$$= - \underbrace{\frac{\varphi(x_0) + e^{x_0}}{3\varphi(x)^2 + x^2} h}_{= \varphi'(x) \text{ d'après le lien dérivée/différentielle}}$$

## Exercice 2

$$\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1\}$$

1) $\mathcal{E}$ est fermé : considérons $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - 1$

alors $g$ est continue et $\mathcal{E} = g^{-1}(\{0\})$ fermé de $\mathbb{R}$

donc $\mathcal{E}$ fermé

$\mathcal{E}$ est borné : Soit $(x,y) \in \mathcal{E}$ alors

$$\|(x,y)\|_2^2 = x^2 + y^2 \leq 3x^2 + 2y^2 = 6\left(\frac{3x^2}{2\times 3} + \frac{2y^2}{2\times 3}\right) = 6$$

donc $\mathcal{E} \subset B(0, \sqrt{6})$.

## Ex 2 (suite)

$\rightarrow$ $\mathcal{E}$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$ de dimension finie, donc c'est un compact de $\mathbb{R}^2$.

L'application $f$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$ donc $f_{|\mathcal{E}}$ admet un maximum et un minimum sur le compact $\mathcal{E}$.

2) On a $\mathcal{E} = g^{-1}(\{0\})$ et $g$ est polynomiale, donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus, pour $(x,y) \in \mathcal{E}$, on a

$$Dg(x,y) = \left(x, \ \frac{2}{3}y\right)$$

Or si $(x,y) \in \mathcal{E}$, $(x,y) \neq (0,0)$ donc $Dg(x,y) \neq 0_{(\mathbb{R}^2)^*}$

Par le théorème des ~~fon~~ extrema liés si ~~u~~ $(x,y) \in \mathcal{E}$ est un extremum de $f_{|\mathcal{E}}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} (x,y) \in \mathcal{E} \\ Df(x,y) = \lambda Dg(x,y) \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \\ 2x = \lambda x \\ 2y = \dfrac{2}{3}\lambda y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = 1 & (1) \\ (2-\lambda)x = 0 & (2) \\ \left(2 - \dfrac{2}{3}\lambda\right)y = 0 & (3) \end{cases}$$

Deux cas possibles :

- $\lambda = 2$ alors par (3), $y = 0$ et donc par (1) $x^2 = 2 \rightsquigarrow u = (\sqrt{2}, 0)$ ou $u = (-\sqrt{2}, 0)$
  dans ce cas $f(\sqrt{2},0) = 2 = f(-\sqrt{2},0)$
- $\lambda = 3$, alors par (2), $x = 0$ et donc par (1)
  $y^2 = 3 \rightsquigarrow u = (0, \sqrt{3})$ ou $u = (0, -\sqrt{3})$

Dans ce cas $f((0,\sqrt{3})) = 3 = f((0,-\sqrt{3}))$

~~→ On sait par (1) que $f$ est bornée et atteint ses bornes sur $\mathcal{E}$.~~

- Le cas $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq \frac{3}{2}$ implique $x = y = 0$, mais ceci contredit (1)

On en déduit que les extrema possibles de $f$ sur $\mathcal{E}$ sont en $(0,\sqrt{2})$, $(0,-\sqrt{2})$, $(0,\sqrt{3})$, $(0,-\sqrt{3})$

De plus, on sait que $f$ est bornée et atteint ses bornes sur $\mathcal{E}$ d'après 1).

Comme $f(0,\sqrt{2}) = f(0,-\sqrt{2}) = 2 < 3 = f(0,\sqrt{3}) = f(0,-\sqrt{3})$

On en déduit qu'en $(0,\sqrt{2})$ et $(0,-\sqrt{2})$, $f$ atteint son minimum sur $\mathcal{E}$

et en $(0,\sqrt{3})$ et $(0,-\sqrt{3})$, $f$ ——— maximum sur $\mathcal{E}$

Or, $f(x,y) = \|(x,y)-(0,0)\|^2$ est le carré de la distance de $(x,y)$ à $(0,0)$.

Puisque, $\forall (x,y) \in \mathcal{E}$, on a $f(x,y) \geq f(0,\sqrt{2}) = f(0,-\sqrt{2})$

on en déduit que $(0,\sqrt{2})$ et $(0,-\sqrt{2})$ sont les points de $\mathcal{E}$ les plus proches de $(0,0)$.

De même, $(0,\sqrt{3})$ et $(0,-\sqrt{3})$ sont les points de $\mathcal{E}$ les moins proches de $(0,0)$.