Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2019-2020
Compléments d'analyse

DM : Compléments d'intégration

A rendre le 30 mars 2020

On commence par introduire quelques définitions :

Définition *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle* support *de f l'ensemble*

$$supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}}.$$

Le support de f est donc l'adhérence de l'ensemble où f est non nulle.

On notera $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, il s'agit de fonctions continues qui valent 0 en dehors d'un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

Exemple : La fonction définie par

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x(1-x) \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est continue à support compact sur $\mathbb{R}$. On a $\text{supp}(f) = [0, 1]$.

On rappelle le résultat suivant :

Théorème *Soit $F \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $G \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $N_p(F - G) < \varepsilon$.*

Autrement dit, on peut approcher toute fonction de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ par une fonction continue à support compact. L'exercice suivant va nous permettre d'obtenir un résultat du même type : on va montrer qu'on peut approcher toute fonction intégrable par une fonction $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice (Régularisation par convolution) Soient f, g deux fonctions mesurables sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Lorsque ça a un sens, on définit le *produit de convolution* de f et g par

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)d\lambda(y) \tag{1}$$

1. Oublions $f \star g$ pour le moment. Pour toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $\tau_h F : x \in \mathbb{R} \mapsto F(x+h)$. Remarquons que, puisque la mesure de Lebesgue est invariante par translation, $N_p(\tau_h F) = N_p(F)$.

(a) Montrer que pour toute suite réelle $(h_n)_n$ qui tend vers 0, et pour toute fonction continue à support compact F, la suite de fonctions $F_n = \tau_{h_n} F$ vérifie

$$\lim_{n\to\infty} N_p(F_n - F) = 0.$$

(b) En déduire que $\lim_{h\to 0} N_p(\tau_h F - F) = 0$.
Indication : Procéder par l'absurde : supposer que $N_p(\tau_h F - F)$ ne tend pas vers 0 quand h tend vers 0, et construire une suite $(h_n)_n$ telle que $h_n \xrightarrow{n\to 0} 0$ mais $N_p(\tau_{h_n} F - F) \nrightarrow 0$.

(c) En déduire que, pour toute fonction $F \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, $\lim_{h\to 0} N_p(\tau_h F - F) = 0$.

2. Soient p, q deux exposants conjugués. On suppose que $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R})$.

(a) Montrer qu'alors $f \star g$ est bien définie, bornée sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$N_\infty(f \star g) \leqslant N_p(f) N_q(g). \tag{2}$$

(b) Montrer que $f \star g$ est uniformément continue, c'est-à-dire

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f \star g(x) - f \star g(x - z)| \xrightarrow{z\to 0} 0$$

Indication : Il s'agit donc de montrer que pour tout x,

$$|f \star g(x) - f \star g(x - z)| \leqslant M(z)$$

avec $M(z) \xrightarrow{z\to 0} 0$.

3. Supposons maintenant que $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. On admet que $f \star g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ est mesurable. Montrer que $f \star g$ est finie μ-p.p. et que $f \star g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, avec

$$N_1(f \star g) \leqslant N_1(f) N_1(g)$$

Indication : Les fonctions intégrables sont finies presque partout !

4. Supposons de plus que g est $\mathscr{C}^\infty$ à support compact.

(a) Montrer que $f \star g$ est dérivable avec

$$(f \star g)'(x) = f \star (g')(x).$$

Indication : On peut utiliser le fait que pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$g(z + h) - g(z) - hg'(z) = h \int_0^1 (g'(z + th) - g'(z)) dt$$

et la continuité de g'.

(b) En déduire que $f \star g$ est $\mathscr{C}^\infty$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(f \star g)^{(n)}(x) = f \star (g^{(n)})(x).$$

5. Soit $\delta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ positive, à support dans $[-1, 1]$ et telle que $\int_R \delta d\lambda = 1$.
   Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\delta_\varepsilon : x \mapsto \frac{1}{\varepsilon}\delta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.
   Montrer que
   $$N_1(f \star \delta_\varepsilon - f) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$
   Indication : Remarquer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_\mathbb{R} \delta_\varepsilon d\lambda = 1$, donc
   $$f(x) = f(x) \int_\mathbb{R} \delta_\varepsilon d\lambda = \int_\mathbb{R} f(x)\delta_\varepsilon(y) d\lambda(y).$$
6. En déduire que, pour toute $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact g telle que $N_1(f - g) < \varepsilon$.