Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2019-2020
Compléments d'analyse

DM1-Corrigé

Exercice (Régularisation par convolution) Soient f, g deux fonctions mesurables sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Lorsque ça a un sens, on définit le *produit de convolution* de f et g par

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)d\lambda(y) \tag{1}$$

1. Oublions $f \star g$ pour le moment. Pour toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $\tau_h F : x \in \mathbb{R} \mapsto F(x+h)$. Remarquons que, puisque la mesure de Lebesgue est invariante par translation, $N_p(\tau_h F) = N_p(F)$.
   (a) Montrer que pour toute suite réelle $(h_n)_n$ qui tend vers 0, et pour toute fonction continue à support compact F, la suite de fonctions $F_n = \tau_{h_n} F$ vérifie
   $$\lim_{n\to\infty} N_p(F_n - F) = 0.$$

   Corrigé : Soit $F \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(h_n)_n$ une suite réelle qui tend vers 0.
   Posons $F_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \tau_{h_n} F(x) = F(x + h_n)$. On va appliquer le théorème de convergence dominée version $\mathscr{L}^p$ (voir exercice 12) à la suite $(F_n)_n$.
   Puisque F est à support compact, il existe $R > 0$ tel que $\mathrm{supp}(F) \subset [-R, R]$.
   Pour tout n, on a alors $\mathrm{supp}(F_n) \subset [-R - h_n, R - h_n]$.
   De plus, puisque F est continue sur le compact $[-R, R]$, et nulle partout ailleurs, F est bornée : il existe donc $M > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|F(x)| \leqslant M$.
   On a donc

   - ▷ Par continuité de F, puisque $h_n \to 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $$F_n(x) = F(x + h_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$$
   - ▷ Puisque $h_n \to 0$, h_n est bornée : il existe $A > 0$ tel que pour tout n, $|h_n| \leqslant A$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{supp}(F_n) \subset [-R - A, R + A]$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pout tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$|F_n(x)| \leqslant M \mathbb{1}_{[-R-A,R+A]} \in \mathscr{L}^p(\lambda).$$

   Donc, par le théorème de convergence dominée, $\boxed{N_p(F_n - F) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$.

(b) En déduire que $\lim_{h\to 0} N_p(\tau_h F - F) = 0$.

Corrigé : Soit F une fonction continue à support compact. Supposons, par l'absurde, que $N_p(\tau_h F - F)$ ne tend par vers 0 quand h tend vers 0. Alors :

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0, \exists h \in \mathbb{R}, |h| < \delta \text{ et } N_p(\tau_h F - F) > \varepsilon_0.$$

Appliquons ceci avec $\delta = \frac{1}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc $h_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$|h_n| < \frac{1}{n} \text{ et } N_p(\tau_{h_n} F - F) > \varepsilon_0.$$

Alors $h_n \to 0$ mais $N_p(\tau_{h_n} F - F) \nrightarrow 0$, ce qui contredit la question précédente.

(c) En déduire que, pour toute fonction $F \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, $\lim_{h\to 0} N_p(\tau_h F - F) = 0$.

Corrigé : Soit $F \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$. Il existe $G \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $N_p(F - G) < \frac{\varepsilon}{3}$. On a alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$N_p(F - \tau_h F) \leqslant N_p(F - G) + N_p(G - \tau_h G) + N_p(\tau_h G - \tau_h F) = 2N_p(F - G) + N_p(G - \tau_h G).$$

Or, puisque $G \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a montré qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $|h| < \delta$, $N_p(G - \tau_h G) < \frac{\varepsilon}{3}$. Au total, on a donc

$$|h| < \delta \Rightarrow N_p(F - \tau_h F) < 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

c'est-à-dire $\boxed{\lim_{h\to 0} N_p(\tau_h F - F) = 0}$.

2. Soient p, q deux exposants conjugués. On suppose que $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R})$.

(a) Montrer qu'alors $f \star g$ est bien définie, bornée sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$N_\infty(f \star g) \leqslant N_p(f) N_q(g). \tag{2}$$

Corrigé : Remarquons que, puisque $g \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R})$, la fonction $\tilde{g} : y \mapsto g(x - y)$ est aussi dans $\mathscr{L}^q(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, par l'inégalité de Hölder, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(y) g(x - y)| d\lambda(y) = N_1(f\tilde{g}) \leqslant N_p(f) N_q(\tilde{g}) < \infty$$

Donc $y \mapsto f(y)g(x - y)$ est intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $f \star g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, en faisant le changement de variable $z = x - y$, on s'aperçoit que $N_q(\tilde{g}) = N_q(g)$. On a donc obtenu, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|f \star g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y) d\lambda(y) \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(y) g(x - y)| d\lambda(y) \leqslant N_p(f) N_q(g),$$

donc

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}, |f \star g(x)| > N_p(f) N_q(g)\}) = \lambda(\emptyset) = 0$$

donc on a bien $\boxed{N_\infty(f \star g) \leqslant N_p(f) N_q(g)}$.

(b) Montrer que $f \star g$ est uniformément continue, c'est-à-dire

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f \star g(x) - f \star g(x-z)| \xrightarrow{z\to 0} 0$$

Indication : Il s'agit donc de montrer que pour tout x,

$$|f \star g(x) - f \star g(x-z)| \leqslant M(z)$$

avec $M(z) \xrightarrow{z\to 0} 0$.

Corrigé : Soient $x, z \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f \star g(x) - f \star g(x-z) &= \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)d\lambda(y) - \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y-z)d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)(g(x-y) - g(x-y-z))d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)((g - \tau_{-z}g)(x-y))d\lambda(y) \end{aligned}$$

or $f \in \mathscr{L}^p$ et $g - \tau_{-z}g \in \mathscr{L}^q$, donc, en utilisant l'inégalité de Hölder comme ci-dessus,

$$|f \star g(x) - f \star g(x-z)| \leqslant N_p(f)N_q(g - \tau_{-z}g)$$

et on montré que $N_q(g - \tau_{-z}g) \xrightarrow[z\to 0]{} 0$. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|z| < \delta \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |f \star g(x) - f \star g(x-z)| < \varepsilon,$$

autrement dit, $f \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

3. Supposons maintenant que $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. On admet que $f \star g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ est mesurable. Montrer que $f \star g$ est finie μ-p.p. et que $f \star g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, avec

$$N_1(f \star g) \leqslant N_1(f)N_1(g)$$

Corrigé : On a vu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f \star g(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(y)g(x-y)|d\lambda(y), \text{ donc} \\ \int_{\mathbb{R}} |f \star g(x)|d\lambda(x) &\leqslant \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(y)g(x-y)|d\lambda(y)d\lambda(x). \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)|d\lambda(y)d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)|d\lambda(x)d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|d\lambda(x)d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)|N_1(\tau_{-y}g)d\lambda(y) = N_1(g)\int_{\mathbb{R}} |f(y)|d\lambda(y) \\ &= N_1(g)N_1(f). \end{aligned}$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} |f \star g(x)| d\lambda(x) \leqslant N_1(f) N_1(g) < \infty$$

On en conclut que $f \star g$ est intégrable, donc finie presque pour tout x, et on a obtenu

$$\boxed{N_1(f \star g) \leqslant N_1(f) N_1(g).}$$

4. Supposons de plus que g est $\mathscr{C}^\infty$ à support compact.
   (a) Montrer que $f \star g$ est dérivable avec

$$(f \star g)'(x) = f \star (g')(x).$$

Corrigé : Posons

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{h}(f \star g(x+h) - f \star g(x) - hf \star (g')(x)).$$

Il s'agit de montrer que $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. Or,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{g(x-y+h) - g(x-y)}{h} - g'(x-y) \right) f(y) d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 (g'(x-y+th) - g'(x-y)) dt f(y) d\lambda(y).
\end{aligned}$$

Or, puisque $g \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, g' est continue à support compact. En particulier, g' est uniformément continue, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{R}$, pour tout $|h| < \delta$,

$$|g'(z+h) - g'(z)| < \varepsilon.$$

En appliquant ceci qvec $z = x - y$ et en observant que $|h| < \delta$ entraîne $|th| < \delta$ pour tout $t \in [0,1]$, on obtient

$$|h| < \delta \Rightarrow |\varepsilon(h)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \varepsilon |f(y)| d\lambda(y) = \varepsilon N_1(f).$$

On a donc bien $\boxed{\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0}$, donc $f \star g$ est dérivable, et

$$(f \star g)' = f \star (g').$$

   (b) En déduire que $f \star g$ est $\mathscr{C}^\infty$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(f \star g)^{(n)}(x) = f \star (g^{(n)})(x).$$

Corrigé : On montre, par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \star g$ est admet une dérivée n-ième donnée par $(f \star g)^{(n)}(x) = f \star (g^{(n)})(x)$.

- ▷ Pour $n=0$: on a bien sûr $(f\star g)^{(0)} = f\star g = f\star g^{(0)}$.
- ▷ Supposons que $f\star g$ est n fois dérivable, avec $(f\star g)^{(n)}(x) = f\star(g^{(n)})(x)$. Montrons la propriété au rang $n+1$.
  Puisque $g\in\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, sa dérivée n-ième $g^{(n)}$ est aussi dans $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, donc, par la question précédente, $f\star(g^{(n)})$ est dérivable et
  $$(f\star(g^{(n)}))' = f\star(g^{(n)\prime}) = f\star(g^{(n+1)}),$$
  donc on a bien $(f\star g)^{(n)}$ dérivable et $(f\star g)^{(n+1)} = f\star(g^{(n+1)})$.

Ainsi, $f\star g$ est bien $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $\delta\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ positive, à support dans $[-1,1]$ et telle que $\int_R \delta d\lambda = 1$.
Pour tout $\varepsilon>0$, on pose $\delta_\varepsilon : x\mapsto \frac{1}{\varepsilon}\delta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.
Montrer que
$$N_1(f\star\delta_\varepsilon - f) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

Corrigé : On calcule

$$\begin{aligned}
f\star\delta_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\delta_\varepsilon(y)d\lambda(y) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\delta_\varepsilon(y)d\lambda(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}} (f(x-y)-f(x))\delta_\varepsilon(y)d\lambda(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}} (f(x-y)-f(x))\delta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\varepsilon}d\lambda(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}} (f(x-\varepsilon z)-f(x))\delta(z)d\lambda(z),
\end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variable $z=\frac{y}{\varepsilon}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f\star\delta_\varepsilon(x) - f(x)|d\lambda(x) &\leqslant \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x-\varepsilon z)-f(x)||\delta(z)|d\lambda(z)d\lambda(x)\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \delta(z)\int_{\mathbb{R}} |f(x-\varepsilon z)-f(x)|d\lambda(x)d\lambda(z) \text{ par Fubini-Tonelli}\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \delta(z)N_1(\tau_{-\varepsilon z}f - f)d\lambda(z).
\end{aligned}$$

Or $z\mapsto\delta(z)N_1(\tau_{-\varepsilon z}f-f) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ d'après la question (1). De plus,

$$\forall\varepsilon>0, |\delta(z)N_1(\tau_{-\varepsilon z}f-f)| \leqslant 2N_1(f)\delta(z)\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R}).$$

Par le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\delta(z)N_1(\tau_{-\varepsilon z}f-f)d\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}}\lim_{\varepsilon\to 0}(\delta(z)N_1(\tau_{-\varepsilon z}f-f))d\lambda(z) = 0.$$

On a donc bien $\boxed{N_1(f\star\delta_\varepsilon - f)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0}$.

6. En déduire que, pour toute $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact g telle que $N_1(f - g) < \varepsilon$.

   Corrigé : Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, $\alpha > 0$. Alors il existe $G \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ telle que $N_1(f - G) < \frac{\alpha}{2}$.
   De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $\delta_\varepsilon \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a vu en (4.b) que $G \star \delta_\varepsilon$ est aussi $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et on a, pour ε assez petit,

$$N_1(G - G \star \delta_\varepsilon) < \frac{\alpha}{2}.$$

   Montrons que $g = G \star \delta_\varepsilon$ est à support compact. Soit R tel que $\operatorname{supp}(G) \subset [-R, R]$. Remarquons que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, $\operatorname{supp}(\delta_\varepsilon) = [-\varepsilon, \varepsilon] \subset [-1, 1]$. Alors

$$G(y)\delta_\varepsilon(x - y) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} y \in [-R, R] \\ x - y \in [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -R \leqslant y \leqslant R \\ -1 + y \leqslant x \leqslant 1 + y \end{cases} \Rightarrow |x| \leqslant R + 1$$

   donc $g(x) \neq 0 \Rightarrow |x| \leqslant R + 1$, autrement dit $\operatorname{supp}(g) \subset [-R - 1, R + 1]$.
   Ainsi, $g \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $\boxed{N_1(f - g)} < \alpha$.