Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2020-2021
Compléments de calcul intégral et différentiel

Devoir maison :

Continuité et différentiabilité de l'inversion des applications linéaires

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues $E \to E$, muni de la norme d'applications linéaires :

$$\forall L \in \mathcal{L}(E),\ \|L\|_{\mathcal{L}} = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}.$$

On note $\mathcal{GL}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires inversibles. On va montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathcal{GL}(E) &\to \mathcal{GL}(E) \\ L &\mapsto L^{-1} \end{aligned}$$

est continue, puis qu'elle est différentiable sur $\mathcal{GL}(E)$.

1 - Continuité.

1. Soit $L_0 \in \mathcal{GL}(E), H \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|H\|_{\mathcal{L}} < \frac{1}{\|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}}$.
   Montrer que $\|L_0^{-1}H\|_{\mathcal{L}} < 1$.

   Corrigé : On sait que, si A, B sont deux applications linéaires continues sur l'espace vectoriel normé E, alors leurs normes vérifient [1]

   $$\|AB\|_{\mathcal{L}} \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}} \|B\|_{\mathcal{L}}$$

   donc ici

   $$\|L_0^{-1}H\|_{\mathcal{L}} \leqslant \|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}} \|H\|_{\mathcal{L}} < \|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}} \frac{1}{\|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}} = 1.$$

2. Montrer que la série

   $$\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n (L_0^{-1}H)^n L_0^{-1}$$

   converge normalement.
   Pourquoi peut-on en déduire qu'elle converge dans $(\mathcal{L}(E),\ \|.\|_{\mathcal{L}})$?

   Corrigé : Rappelons que, dans un espace vectoriel normé, on dit que la série de terme général $(u_n)_n$ converge *normalement* si la série de terme général $(\|u_n\|)_n$ converge dans $\mathbb{R}$. Ici, on s'intéresse à la série de terme général

   $$U_n = (-1)^n (L_0^{-1}H)^n L_0^{-1} \in \mathcal{L}(E),$$

1. Pas besoin que E soit un Banach pour ça.

et on a donc
$$\|U_n\|_{\mathcal{L}} = \|(L_0^{-1}H)^n L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leqslant \|L_0^{-1}H\|_{\mathcal{L}}^n \|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}$$
On obtient donc que $\|U_n\|_{\mathcal{L}}$ est majorée par une suite géométrique de raison $\|L_0^{-1}H\|_{\mathcal{L}} < 1$ d'après (1). Comme une telle série géométrique converge, on en déduit que la série de terme général $(\|U_n\|)_n$ converge dans $\mathbb{R}$, autrement dit que la série de terme général $(U_n)_n$ converge normalement dans $\mathcal{L}(E)$.

Or, puisque E est complet, $\mathcal{L}(E)$ est également complet, donc toute série normalement convergente de $\mathcal{L}(E)$ est convergente.

3. Montrer que $L_0 + H$ est inversible d'inverse $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n (L_0^{-1}H)^n L_0^{-1}$.

Corrigé : On calcule d'une part

$$(L_0+H)\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n (L_0^{-1}H)^n L_0^{-1} = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n L_0 (L_0^{-1}H)^n L_0^{-1} + \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n H (L_0^{-1}H)^n L_0^{-1}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{cases} L_0(L_0^{-1}H)^n L_0^{-1} & = L_0(L_0^{-1}H)\dots(L_0^{-1}H)L_0^{-1} = (HL_0^{-1})^n \\ H(L_0^{-1}H)^n L_0^{-1} & = (HL_0^{-1})^{n+1} \end{cases}$$

donc
$$\begin{aligned}
(L_0 + H)\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n (L_0^{-1}H)^n L_0^{-1} &= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n (HL_0^{-1})^n + \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n (HL_0^{-1})^{n+1} \\
&= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n (HL_0^{-1})^n - \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1} (HL_0^{-1})^{n+1} \\
&= (-1)^0 (HL_0^{-1})^0 + \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n (HL_0^{-1})^n - \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1} (HL_0^{-1})^{n+1} \\
&= Id
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n (L_0^{-1}H)^n L_0^{-1}\right)(L_0 + H) &= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n (L_0^{-1}H)^n L_0^{-1} L_0 + \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n (L_0^{-1}H)^n L_0^{-1} H \\
&= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n (L_0^{-1}H)^n + \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n (L_0^{-1}H)^{n+1} \\
&= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n (HL_0^{-1})^n - \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1} (HL_0^{-1})^{n+1} \\
&= (-1)^0 (HL_0^{-1})^0 = Id
\end{aligned}$$

donc $(L_0 + H)$ est inversible d'inverse $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n (L_0^{-1}H)^n L_0^{-1}$.

⚠ Ici, rien ne dit que E soit de dimension finie. Par conséquent, pour vérifier qu'une application linéaire $A\mathcal{L}(E)$ est inversible d'inverse $B \in \mathcal{L}(E)$, il faut vérifier $AB = Id_E$ *et* $BA = Id_E$.
En effet, l'un peut être vrai, mais pas l'autre : considérer par exemple, sur $E = \mathbb{R}[X]$,
$$A : P \in E \mapsto P' \in E, \quad B : P \in E \mapsto \int_0^X P(t)dt \in E$$
alors $AB = Id_E$ mais $BA : P \in E \mapsto P - P(0) \in E$ donc $BA \neq Id_E$.

4. En déduire que $\mathcal{GL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

Corrigé : Soit $L_0 \in \mathcal{GL}(E)$, montrons qu'il existe $r > 0$ tel que $B(L_0, r) \subset \mathcal{GL}(E)$. On a vu que si $\|H\|_{\mathcal{L}} < \frac{1}{\|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}}$ alors $L_0 + H$ est inversible.

Donc, si $L \in B(L_0, \frac{1}{2\|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}})$, en posant $H = L - L_0$, on a bien $\|H\|_{\mathcal{L}} < \frac{1}{2\|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}}$ donc $L = L_0 + H \in \mathcal{GL}(E)$.

On a donc montré que, pour tout $L_0 \in \mathcal{GL}(E)$,

$$B(L_0, \frac{1}{2\|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}}) \subset \mathcal{GL}(E),$$

donc $\mathcal{GL}(E)$ est un ouvert de $(\mathcal{L}(E), \|.\|_{\mathcal{L}})$.

5. Soit $L \in B(L_0, \frac{1}{2\|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}})$. Exprimer $\|L^{-1} - L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}$ en fonction de $\|L - L_0\|_{\mathcal{L}}$. En déduire que $\mathcal{I}$ est continue en L_0.

Corrigé : Posons, comme précédemment, $H = L - L_0$. Alors $L = L_0 + H$ donc, d'après la formule obtenue pour $L^{-1} = (L_0 + H)^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} L^{-1} - L_0^{-1} &= \left(\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n (L_0^{-1} H)^n L_0^{-1} \right) - L_0^{-1} = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n (L_0^{-1} H)^n L_0^{-1} \\ &= (-1)(L_0^{-1} H) \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} (L_0^{-1} H)^{n-1} L_0^{-1} \\ &= L_0^{-1}(L_0 - L) \sum_{k \geqslant 0} (-1)^n (L_0^{-1} L - Id)^k L_0^{-1} \end{aligned}$$

d'où

$$\|L^{-1} - L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leqslant \|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}} \|L_0 - L\|_{\mathcal{L}} \left\| \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n (L_0^{-1} L - Id)^{n-1} L_0^{-1} \right\|_{\mathcal{L}}$$

Or, puisque $\|L_0\|_{\mathcal{L}} \|L_0^{-1} L - Id\|_{\mathcal{L}} = \|L - L_0\|_{\mathcal{L}} < \frac{1}{2\|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}}$, on a

$$\|L_0^{-1} L - Id\|_{\mathcal{L}} < \frac{1}{2\|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}} \|L_0\|_{\mathcal{L}}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}(L) - \mathcal{I}(L_0)\|_{\mathcal{L}} &\leqslant \|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}} \|L - L_0\|_{\mathcal{L}} \sum_{k \geqslant 0} \|L_0^{-1} L - Id\|_{\mathcal{L}}^k \|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}} \\ &\leqslant \|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}^2 \|L - L_0\|_{\mathcal{L}} \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{2^k} \\ &\leqslant 2\|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}^2 \|L - L_0\|_{\mathcal{L}} \end{aligned}$$

donc $\|\mathcal{I}(L) - \mathcal{I}(L_0)\|_{\mathcal{L}} \to 0$ quand $\|L - L_0\|_{\mathcal{L}} \to 0$. Autrement dit, $\mathcal{I}$ est continue en L_0.

⚠ Attention, on n'a pas obtenu que $\mathcal{I}$ était Lipschitzienne : $2\|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}^2$ n'est pas une constante, elle dépend de L_0 !

2 - Différentiabilité.

On reprend les notations précédentes : $L_0 \in \mathcal{GL}(E), H \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|H\|_{\mathcal{L}} < \frac{1}{\|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}}$.

1. Montrer que

$$\mathcal{I}(L_0 + H) = \mathcal{I}(L_0) - L_0^{-1} H L_0^{-1} + R(H) \text{ avec } \|R(H)\|_{\mathcal{L}} = \|H\|_{\mathcal{L}}^2 S(\|H\|_{\mathcal{L}}).$$

Corrigé : On a obtenu ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(L_0 + H) &= (L_0 + H)^{-1} \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n (L_0^{-1} H)^n L_0^{-1} \\
&= ((-1)^0 (L_0^{-1} H)^0 L_0^{-1}) + ((-1)^1 (L_0^{-1} H)^1 L_0^{-1}) + \sum_{n \geqslant 2} (-1)^n (L_0^{-1} H)^n L_0^{-1} \\
&= L_0^{-1} - L_0^{-1} H L_0^{-1} + (L_0^{-1} H)^2 \sum_{n \geqslant 2} (-1)^n (L_0^{-1} H)^{n-2} L_0^{-1}
\end{aligned}$$

0n identifie donc :

$$\mathcal{I}(L_0 + H) = \mathcal{I}(L_0) - L_0^{-1} H L_0^{-1} + R(H) \text{ où } R(H) = (L_0^{-1} H)^2 \sum_{n \geqslant 2} (-1)^n (L_0^{-1} H)^{n-2} L_0^{-1}$$

Reste à étudier $\|R(H)\|_{\mathcal{L}}$. On a

$$\begin{aligned}
\|R(H)\|_{\mathcal{L}} &\leqslant \|H\|_{\mathcal{L}}^2 \|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}^2 \sum_{n \geqslant 2} \|H L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}^{n-2} \\
&\leqslant \|H\|_{\mathcal{L}}^2 \|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}^2 \sum_{k \geqslant 0} \|H L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}^{k} \\
&\leqslant \frac{\|H\|_{\mathcal{L}}^2 \|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}^2}{1 - \|H L_0^{-1}\|}
\end{aligned}$$

Donc on peut bien écrire $\|R(H)\|_{\mathcal{L}} \leqslant \|H\|_{\mathcal{L}}^2 S(H)$, où

$$S(H) \leqslant \frac{\|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}^2}{1 - \|H L_0^{-1}\|}$$

vérifie $S(H) \to \|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}^2 < \infty$ quand $\|H\| \to 0$.

2. En déduire que $\mathcal{I}$ est différentiable en L_0.

Corrigé : On a donc, pour tout $L_0 \in \mathcal{GL}(E)$,

$$\mathcal{I}(L_0 + H) = \mathcal{I}(L_0) + \Phi(H) + R(H)$$

où, d'une part, l'application

$$\Phi : H \in \mathcal{L}(E) \mapsto -L_0^{-1} H L_0^{-1} \in \mathcal{L}(E)$$

est linéaire : en effet, si $H_1, H_2 \in\in \mathcal{L}(E), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2) &= -L_0^{-1}(\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2) L_0^{-1} \\
&= (-\lambda_1 L_0^{-1} H_1 - \lambda_2 L_0^{-1} H_2) L_0^{-1} = -\lambda_1 L_0^{-1} H_1 L_0^{-1} - \lambda_2 L_0^{-1} H_2 L_0^{-1} \\
&= \lambda_1 \phi(H_1) + \lambda_2 \Phi(H_2).
\end{aligned}$$

⚠ Attention à ne pas confondre le fait que $\Phi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ est linéaire su l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$, et le fait que l'application composée $L_0^{-1} H L_0^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ soit une application linéaire sur l'espace vectoriel E.

De plus, pour tout $H \in \mathcal{L}(E)$,

$$\|\Phi(H)\|_{\mathcal{L}} = \|L_0^{-1} H L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leqslant \|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}}^2 \|H\|_{\mathcal{L}}$$

donc Φ est continue.
D'autre part, le reste $R(H)$ vérifie, pour $H \in \mathcal{L}(E)$

$$\frac{\|R(H)\|_{\mathcal{L}}}{\|H\|_{\mathcal{L}}} = \|H\|_{\mathcal{L}} S(\|H\|_{\mathcal{L}}) \xrightarrow[\|H\|_{\mathcal{L}} \to 0]{} 0$$

Par définition de la différentiabilité, ceci signifie que $\mathcal{I}$ est différentiable en L_0 de différentielle

$$D\mathcal{I}(L_0) : H \in \mathcal{L}(E) \mapsto -L_0^{-1} H L_0^{-1} \in \mathcal{L}(E).$$

3. Qu'est-ce-que ça donne pour $n = 1$?

Corrigé : Ici, on entendait par là "Qu'est-ce que ça donne quand $\dim(E) = 1$?" [2].
En dimension 1, donc, $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{I}$ est l'application qui, à une application linéaire inversible $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associe son inverse.
Or, une application linéaire $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de la forme $h_\alpha : x \in \mathbb{R} \mapsto \alpha x \in \mathbb{R}$, et elle est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$. Dans ce cas, on a en fait

$$\mathcal{I}(h_\alpha) = h_{\frac{1}{\alpha}} \text{ pour } \in \mathbb{R}^*$$

$\rightsquigarrow$ On peut identifier $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ via $h_\alpha \mapsto \alpha$, et alors $\mathcal{I}$ s'identifie à l'application $\alpha \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}^*$.
On a obtenu (mais on le savait déjà !) que $\mathcal{I}$ était différentiable en tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, et

$$D\mathcal{I}(\alpha_0) : b \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{\alpha_0} b \frac{1}{\alpha_0} = -\frac{b}{\alpha_0^2}$$

Autrement dit, en utilisant le lien dérivée-différentielle,

$$I'(\alpha_0) = -\frac{1}{\alpha_0^2}$$

On retrouve la dérivée bien connue de la fonction $1/x$.

2. Désolée, ce n'était vraiment pas clair !