Université Paris 1
L3 MIASHS
Compléments de Calcul Intégral et Différentiel
Année 2020-2021

Sujets de réflexion - Mai 2021

Consignes

Le texte suivants traite d'un résultat mathématique, avec un certain nombre de points non démontrés.

Le but de l'épreuve est de montrer vos compétences mathématiques. Vous pouvez notamment compléter certaines démonstrations, préciser certains points, proposer des exemples. Il n'est pas nécessaire de tout démontrer pour avoir 20.

Vous devez rendre un texte similaire, expliquant ce que vous avez compris, en incorporant les preuves, exemples et précisions que vous aurez traités.

Dans ce sujet d'entraînement, les points que vous pouvez chercher à expliciter sont en bleu : ce ne sera pas le cas pour le sujet de l'examen. Il ne faut pas voir ces indications comme des questions à traiter indépendamment : à nouveau, le but est de comprendre le texte dans sa globalité, et il n'est pas nécessaire de faire toutes les preuves.

Remarque : les sujets de partiel seront probablement un peu plus longs, pour vous donner plus de choix et vous permettre de mettre en valeur vos points forts.

Sujet d'entraînement : Valeurs propres des matrices symétriques.

Notons $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, et $\|.\|_2$ la norme associée. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|A\| = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

On note $E \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques, muni lui aussi de la norme $\|.\|$.

Par ailleurs, on note $F = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, que l'on munit de la norme produit $\|(v,\alpha)\|_F = \|v\|_2 + |\alpha|$.

Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : E \times F &\to F \\ (A,(u,\lambda)) &\mapsto (Au - \lambda u, \langle u,u \rangle - 1) \end{aligned}$$

Alors f est différentiable sur E, et sa différentielle au point $(A,(u,\lambda)) \in E \times F$ est donnée par

$$Df(A,(u,\lambda)) : (M,(h,\delta)) \in E \times F \mapsto (Ah + Mu - \lambda h - \delta u,\ 2\langle u,h \rangle) \in F$$

De plus, f est $\mathscr{C}^1$ sur $E \times F$: l'application

$$(A,(u,\lambda)) \in E \times F \mapsto Df(A,(u,\lambda)) \in \mathcal{L}(E \times F, F)$$

est continue.

Soit $A_0 \in E$ une matrice symétrique, λ_0 une valeur propre *simple* de A_0, et $u_0 \in S_2(0,1)$ un vecteur propre unitaire associé. Alors $f(A_0,(u_0,\lambda_0)) = 0_F$.

Considérons

$$f_2 : (u,\lambda) \in F \mapsto f(A_0,u,\lambda).$$

Alors f_2 est $\mathscr{C}^1$, et sa différentielle en (u_0,λ_0) est donnée par

$$Df_2((u_0,\lambda_0))(h,\delta) = (A_0h - \lambda_0 h - \delta u_0, 2\langle u_0,h \rangle)$$

C'est un endormorphisme de F, et on obtient que $\ker Df_2((u_0, \lambda_0)) = \{0_F\}$, ce qui permet de conclure que $Df_2((u_0, \lambda_0))$ est inversible.

On en déduit qu'il existe un voisinage U de A_0 dans E, un voisinage V de u_0 dans $\mathbb{R}^n$ et un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant λ_0, ainsi que deux fonctions $\mathscr{C}^1$

$$\varphi : U \to I \text{ et } \psi : U \to V$$

telles que, pour tout $A \in U$, $\lambda \in I$ et $u \in V$, λ est valeur propre de A et u est un vecteur propre unitaire associé si, et seulement si, $\lambda = \varphi(A)$ et $u = \psi(A)$.

Ce théorème ne s'applique pas si λ_0 n'est pas une valeur propre simple de A_0 ; ainsi, prenons $n = 2$ et

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, les valeurs propres de $A = A_0 + \varepsilon A_1$ sont $\sqrt{\varepsilon}$ et $-\sqrt{\varepsilon}$: ce ne sont pas des fonctions $\mathscr{C}^1$ de la matrice A.