UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Mathématiques - L1 Économie.

Semestre 2 - Année 2023/2024

COURS

Chapitres 3,4 et 5

Cours magistraux			
Division	Jour et horaire	Amphi	Enseignant
1	Vendredi 12h30-13h30	Amphi I	S. Jallais
2	Mardi 9h30-10h30	Amphi J	J. Lecointre
3	Mardi 16h00-17h00	Amphi L	J. Lecointre

DE/TD			
Groupes de TD	Jour et horaire	Amphi	Enseignant
TD 1101 / 1102 / 1103 / 1104	Lundi 16h00 -17h30	Amphi H	N. Touré
TD 1105 / 1106 / 1107	Lundi 11h30 - 13h00	Amphi L	N. Canry
TD 1108/ 1109 / 1110 / 1111	Mardi 12h00-13h30	Amphi J	J. Lecointre
TD 1201 / 1202 / 1203	Mercredi 17h30-19h00	Amphi J	O. Joya
TD 1204 / 1205 / 1211	Lundi 15h30-17h00	Amphi K	JF. caulier
TD 1206 / 1208 / 1212	Samedi 11h30 -13h00	Amphi J	V. Calaud
TD 1207 / 1209 / 1210	Mercredi 9h00-10h30	Amphi K	L. Pejsachowicz
TD 1301 / 1303 / 1305	Vendredi 14h00-15h30	Amphi K	S. Jallais
TD 1302 / 1304 / 1306	Mercredi 11h30-13h00	Amphi L	S. Jallais
TD 1307 / 1308 / 1309 / 1310	Mercredi 16h-17h30	Amphi K	O. Joya

Table des matières

3. Les limite(s) des fonctions à une variable. 4

1. Introduction : Définition intuitive d'une limite. 4
2. Comprendre les limites avec un exemple. 4
   - 2.1. Limites en l'infini 5
   - 2.2. Limites en 0 5
   - 2.3. Représentation graphique de la fonction avec les calculs des limites 6
3. Calculs des limites 7
4. Opérations sur les limites 8
5. Fonctions équivalentes 10
6. Détermination des limites en présence de formes indéterminées ? 11
   - 6.1. Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ 11
   - 6.2. Forme indéterminée $\infty - \infty$. 12
   - 6.3. Forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ quand x tend vers a avec $a \in \mathbb{R}$. 13
   - 6.4. Forme indéterminée $0 \times \infty$. 13
7. Asymptotes horizontale et verticale 13
   - 7.1. Définitions et équations des asymptotes 13
   - 7.2. Comment déterminer la position en $\pm\infty$ de la courbe par rapport à une asymptote horizontale ? 14

4. Dérivées et applications de la dérivation. 15

1. Définitions 15
   - 1.1. Représentation graphique du problème 15
   - 1.2. Nombre dérivé et équation de la tangente en x_0 16
   - 1.3. La fonction dérivée 16
   - 1.4. Dérivées et élasticités 17
   - 1.5. Dérivée des fonctions composées ou dérivée en chaîne 18
   - 1.6. Continuité et dérivabilité 18
2. Dérivées d'ordre supérieur 19
3. Applications de la dérivation : calculs de limites, sens de variation, extremums, convexité et point d'inflexion. 19
   - 3.1. Calcul de limites avec les dérivées : Règle de l'Hospital 19
   - 3.2. Sens de variation 20
   - 3.3. Signe de la dérivée et sens de variation (Rappel S1) 21
   - 3.4. Convexité et concavité 22
   - 3.5. Extremum local : deux conditions 23

5. Fonctions exponentielle et logarithme népérien 28

1. Définition et propriétés de la fonction exponentielle de base a. 28
2. La fonction exponentielle de base e : $f(x) = e^x$. 29
   - 2.1. Domaine de définition et ensemble des images de la fonction exponentielle 29
   - 2.2. Sens de variation et extremum 29
   - 2.3. Concavité/convexité et point d'inflexion 29
   - 2.4. Limites et asymptotes 29
   - 2.5. Propriétés de la fonction $f(x) = e^x$ 29
   - 2.6. Représentation graphique 29

3. Fonction composée avec une exponentielle $f(x) = e^{u(x)}$ 30
4. De la fonction exponentielle en base e à la fonction logarithme népérien : fonctions réciproques 31
 4.1. Qu'est-ce qu'une fonction réciproque ? 31
 4.2. Application : la fonction logarithme népérien est la réciproque de la fonction exponentielle de base e. 32
5. Fonction logarithme népérien notée $\ln(x)$ 33
 5.1. Domaine de définition et continuité 33
 5.2. Sens de variation et extremum 33
 5.3. Concavité/convexité 33
 5.4. Limites et asymptotes 33
 5.5. Limites indéterminées avec exponentielle, log népérien et/ou puissance 34
 5.6. Résolution de l'équation $\ln(x) = 0$. 34
 5.7. Propriétés de la fonction $\ln(x)$ 34
6. Fonction composée avec une fonction log népérien : $f(x) = \ln(u(x))$ 35
7. Résolution d'équation avec $\exp(x)$ et $\ln(x)$. 36
 7.1. Élasticité et log 37
 7.2. Log et taux de croissance instantané 37

Chapitre 3

Les limite(s) des fonctions à une variable.

1 Introduction : Définition intuitive d'une limite.

Donnons du sens à l'équation suivante : $\lim_{x \to a} f(x) = b$.
La limite de la fonction $f(x)$ est égale à b (en supposant qu'elle existe. Ce qui n'est pas toujours le cas!) c'est-à-dire que $f(x)$ se rapproche de b lorsque x se rapproche de la valeur a. Avec, $a \in D_f$, dans ce cas a est un élément du domaine de définition. Ou, $a \notin D_f$ c'est-à-dire que a n'appartient pas au domaine de définition mais des valeurs de x très proches de a lui appartiennent. On dit alors que a est une borne ouverte du domaine de définition.
a est soit un nombre réel, soit $+\infty$ ou $-\infty$.

2 Comprendre les limites avec un exemple.

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ la fonction inverse. Nous avons vu que son domaine de définition était $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. Ce domaine de définition comporte quatre bornes ouvertes (4 crochets ouverts). Il y a donc quatre limites "intéressantes" à calculer.

Comment savoir quelles sont les limites "intéressantes" à calculer ?

Dans un grand nombre de cas, le calcul de la limite est très simple. En effet, si $a \in D_f$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$

Exemple 41 : $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1 = f(1)$. Quand x se rapproche de 1 alors $f(x)$ se rapproche de $f(1)$.

Exemple 42 : $\lim_{x \to 4} \frac{1}{x} = \frac{1}{4} = f(4)$. Quand x se rapproche de 4 alors $f(x)$ se rapproche de $f(4)$.

Exemple 43 : Que l'on peut généraliser : $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{1}{a} = f(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}^*$ avec $a \neq +\infty$ et $a \neq -\infty$.

Or, il peut être intéressant de connaître le comportement de la fonction lorsque x s'approche des bornes ouvertes du domaine de définition :

a) Comment se comporte $f(x)$ quand x tend vers $\pm\infty$? (cf. section 2.1)

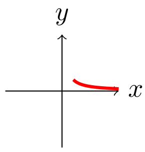
b) Comment se comporte $f(x)$ quand x se rapproche de 0 ? Attention, il existe deux manières de se rapprocher de 0. C'est pourquoi il y a 4 limites "intéressantes" à calculer (cf. section 2.2)

2.1 Limites en l'infini

1. **Limite en** $+\infty$.
   - Illustrations par le calcul. Dans le tableau ci-dessous on calcule les images par $f(x)$ pour des antécédents de plus en plus grands.

x	10	100	1000	10000
$f(x)$	$\frac{1}{10} = 0,1$	$\frac{1}{100} = 0,01$	$\frac{1}{1000} = 0,001$	$\frac{1}{10000} = 0,0001$

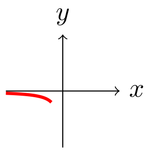
   On constate que lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient très petit mais reste positif. On constaterait la même chose avec des valeurs encore plus grandes de x. Ainsi, lorsque $x \to +\infty$ alors $f(x) \to 0$. Ce résultat s'écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
   - Lecture graphique : Quand x devient très grand (x s'éloigne de l'origine sur l'axe des abscisses), $f(x)$ se rapproche de l'axe des abscisses donc devient petit (la valeur de $f(x)$ est lue sur l'axe des ordonnées).



2. **Limite en** $-\infty$.
   - Illustrations par le calcul.

x	-10	-100	-1000	-10000
$f(x)$	$\frac{1}{-10} = -0,1$	$\frac{1}{-100} = -0,01$	$\frac{1}{-1000} = -0,001$	$\frac{1}{-10000} = -0,0001$

   On constate que lorsque x tend vers $-\infty$ alors $f(x)$ se rapproche de 0 par valeurs négatives.
   - Lecture graphique : Quand x s'éloigne de l'origine sur l'axe des abscisses vers $-\infty$, $f(x)$ se rapproche de l'axe des abscisses donc devient petit mais reste négatif.



3. Qu'est-ce qui change entre la limite en plus ou moins ∞ ?
   Quand $x \to +\infty$, $f(x)$ se rapproche de 0 mais reste supérieur à 0. La courbe représentative de f est au-dessus de l'axe des abscisses. Alors que lorsque $x \to -\infty$, $f(x)$ se rapproche de 0 mais reste inférieur à 0. La courbe est en dessous de l'axe des abscisses.
   Pour être plus précis, on peut écrire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$.

2.2 Limites en 0

1. La valeur $x = 0$ est interdite pour la fonction inverse. Or, la fonction reste définie pour des valeurs proches de 0. Il existe deux "types" de valeurs proches de 0 c'est-à-dire qu'il existe deux manières de s'approcher de 0 : par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures [1]. Le tableau ci-dessous illustre ces deux manières.

1. Avec la fonction inverse, $f(x) = \frac{1}{x}$, nous aurions pu dire par valeurs positives à la place de valeurs supérieures et valeurs négatives à la place de valeurs inférieures.

$x \to 0^-$ $x \to 0$ et $x < 0$	$x \to 0^+$ $x \to 0$ et $x > 0$
-0,5	0,5
-0,4	0,4
...	...
-0,1	0,1
-0,01	0,01
-0,001	0,001
...	...

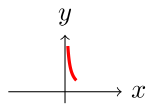
2. **Limite en 0 par valeurs supérieures : $x \to 0$ et $x > 0$.**

   • Illustrations par le calcul :

x	0,1	0,01	0,001
$f(x)$	$\dfrac{1}{0,1} = 10$	$\dfrac{1}{0,01} = 100$	$\dfrac{1}{0,001} = 1000$

   Quand $x \to 0^+$, $f(x)$ devient de plus en plus grand. Ce que l'on peut écrire : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

   • Lecture graphique : Quand x s'approche de l'origine tout en restant positif, $f(x)$ se rapproche de l'axe des ordonnées et devient très grand.



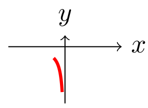
3. **Limite en 0 par valeurs inférieures : $x \to 0$ et $x < 0$.**

   • Illustrations par le calcul :

x	-0,1	-0,01	-0,001
$f(x)$	$\dfrac{1}{-0,1} = -10$	$\dfrac{1}{-0,01} = -100$	$\dfrac{1}{-0,001} = -1000$

   Quand $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$. Ce que l'on peut écrire : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

   • Lecture graphique : Quand x s'approche de l'origine tout en restant négatif, $f(x)$ se rapproche de l'axe des ordonnées et devient très grand négativement.

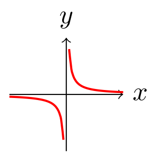


Synthèse : Limites à droite et à gauche quand $x \to a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x) = b$ alors $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a par valeurs supérieures. C'est la limite à droite en a.
2. Si $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x) = b$ alors $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a par valeurs inférieures. C'est la limite à gauche en a.
3. Si $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x) = b = \lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x)$ alors $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = b$. Lorsque les limites à droite et à gauche de a sont égales alors la limite existe en a et est égale à b. La réciproque est vraie.
4. (Théorème) Si $f(x)$ admet une limite en a, avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$, alors **cette limite est unique**.

2.3 Représentation graphique de la fonction avec les calculs des limites

Les informations précédentes permettent de "dessiner" le comportement de la courbe aux bornes du domaine de définition mais non l'ensemble de la courbe. Avec les limites, on ne sait pas ce qui passe entre 0^+ et $+\infty$ et entre $-\infty$ et 0^-. C'est l'étude du sens de variation et de la convexité qui nous permettra de "dessiner" la courbe. A tire d'exemple, la représentation graphique de la fonction inverse se trouve ci-dessous. C'est ce que l'on appelle une hyperbole.



3 Calculs des limites

Lorsqu'une fonction est continue, le calcul de la limite en $a \in D_f$ est très simple. Il suffit de remplacer directement dans la fonction : quand $a \in D_f$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemple 44 : Soit $f(x) = 3x + 1$ alors...

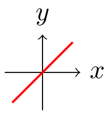
...$\lim_{x \to 2} f(x) = 3 \times 2 + 1 = 7 = f(2)$. Quand x se rapproche de 2 alors $f(x)$ se rapproche de $f(2)$.
...$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \times 1 + 1 = 4 = f(1)$.
Que l'on peut généraliser : $\forall a \in D_f = \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} f(x) = 3 \times a + 1 = f(a)$.

Par la suite, nous nous intéresserons uniquement au calcul des limites aux bornes ouvertes du domaine de définition. Pour cela, nous utiliserons les propriétés (à connaitre par cœur) des fonctions usuelles ainsi que les propriétés des fonctions construites par composition des fonctions usuelles. Dans certains cas, le résultats sera immédiat dans d'autres cas il sera a priori indéterminé et il faudra recourir à diverses méthodes pour lever l'indétermination.

Limites usuelles à connaitre

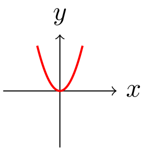
1. Soit $f(x) = x$ alors...

   (a) ...$\lim_{x \to 0} x = 0$
   (b) ... $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$
   (c) ... $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

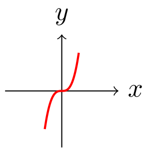


2. Soit $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ alors...

   (a) ... $\lim_{x \to a} x^n = a^n$
   (b) ... $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
   (c) ... $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \textit{ quand } n \textit{ est pair} \\ -\infty \textit{ quand } n \textit{ est impair} \end{cases}$



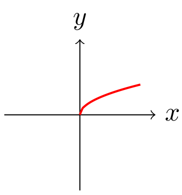
$f(x) = x^n$ avec n pair



$f(x) = x^n$ avec n impair

3. Soit $f(x) = \sqrt{x}$

   (a) ...$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a \in \mathbb{R}^+$ donc $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$
   (b) ... $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
   (c) ... $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x}$ n'existe pas (cf. domaine de définition).



$f(x) = \sqrt{x}$

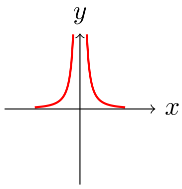
4. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

(a) ... $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$

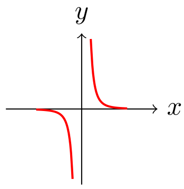
(b) ... $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty \textit{ quand } n \textit{ est pair} \\ -\infty \textit{ quand } n \textit{ est impair} \end{cases}$

(c) ... $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0^+$

(d) ... $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} 0^+ \textit{ quand } n \textit{ est pair} \\ 0^- \textit{ quand } n \textit{ est impair} \end{cases}$



$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec n pair



$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec n impair

Exemple 45 : Soit $f(x) = x^2$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$;

Exemple 46 : Soit $f(x) = x^3$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

Exemple 47 : Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+$;

Exemple 48 : Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$.

Exemple 49 : Soit $f(x) = \sqrt{3x}$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{3x} = \sqrt{3\times 0} = \sqrt{0} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{3x}$ n'existe pas car la fonction racine carrée n'est pas définie pour $x \in \mathbb{R}^-$.

4 Opérations sur les limites

Soient f et g définies de $I \to \mathbb{R}$ avec $I \subseteq \mathbb{R}$ qui se lit "I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (cf. chapitre 1). Et soit, l et l' deux réels.

1. **Limite de** $f + g =$

f \ g	l' avec $l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
l avec $l \in \mathbb{R}$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**FI**
$-\infty$	$-\infty$	**FI**	$-\infty$

La limite de la somme de deux fonctions est la somme des limites. Dans certains cas, le résultat de cette somme est a priori indéterminé. On parle alors de **formes indéterminées (FI dans le tableau)** : $\infty - \infty$ et $-\infty + \infty$. ATTENTION, une forme indéterminée ne signifie pas que la limite n'existe pas mais que l'on ne sait pas, en l'état actuel, la calculer. Il faudra réfléchir un peu pour lever l'indétermination (c'est-à-dire donner une valeur à la limite) ou montrer que la limite n'existe pas.

2. **Limite de** $f \times g =$

$f \backslash g$	$l' \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l \neq 0$ $l \in \mathbb{R}$	$l \times l'$	0	$+\infty$ si $l > 0$ $-\infty$ si $l < 0$	$-\infty$ si $l > 0$ $+\infty$ si $l < 0$
0	0	0	**FI**	**FI**
$+\infty$	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$	**FI**	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$ si $l' < 0$ $-\infty$ si $l' > 0$	**FI**	$-\infty$	$+\infty$

La limite d'un produit est le produit des limites. Lorsque le produit est de la forme $0 \times \infty$ le résultat est une forme indéterminée (FI).

3. **Limite de** $\dfrac{f}{g} =$

$f \backslash g$	$l' \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$l \neq 0$	$\dfrac{l}{l'}$	$+\infty$ si $l > 0$ $-\infty$ si $l < 0$	$-\infty$ si $l > 0$ $+\infty$ si $l < 0$	0^+ si $l > 0$ 0^- si $l < 0$	0^- si $l > 0$ 0^+ si $l < 0$
0^+	0^+ si $l' > 0$ 0^- si $l' < 0$	**FI**	**FI**	0^+	0^-
0^-	0^- si $l' > 0$ 0^+ si $l' < 0$	**FI**	**FI**	0^-	0^+
$+\infty$	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	**FI**	**FI**
$-\infty$	$+\infty$ si $l' < 0$ $-\infty$ si $l' > 0$	$-\infty$	$+\infty$	**FI**	**FI**

La limite d'un quotient est le quotient des limites. Lorsque le quotient est de la forme $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, le résultat est une forme indéterminée (FI).

Les exemples ci-dessous illustrent les opérations sur les limites. Si une forme indéterminée est mise en évidence, nous verrons comment la calculer dans la section suivante.

1. **Limite de** $f + g$ **et** $f - g$

Exemple 50 : Soit $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$ alors...

$$\ldots \lim_{x\to+\infty}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2 + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = +\infty + 0 = +\infty.$$

$$\ldots \lim_{x\to-\infty}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2 + \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = +\infty - 0 = +\infty.$$

$$\ldots \lim_{x\to0^+}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0^+} x^2 + \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x} = 0 + \infty = +\infty.$$

$$\ldots \lim_{x\to0^-}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0^-} x^2 + \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x} = 0 - \infty = -\infty.$$

Exemple 51 : Soit $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$ donc $D_f = \mathbb{R}^+$ alors...

... $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 - \sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}$: FI du type $+\infty - \infty$. Il faudra trouver une règle ou une astuce pour lever l'indétermination (voir partie 6).

$$\ldots \lim_{x\to0}\left(x^2 - \sqrt{x}\right) = 0 - 0 = 0.$$

2. **Limite de** $f \times g$

Exemple 52 : Soit $f(x) = -3 \times \sqrt{x}$ donc $D_f = \mathbb{R}^+$ alors...

$$... \lim_{x \to +\infty} (-3 \times \sqrt{x}) = \lim_{x \to +\infty} (-3) \times \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = -3 \times +\infty = -\infty$$

$$... \lim_{x \to 0} (-3 \times \sqrt{x}) = \lim_{x \to 0} (-3) \times \lim_{x \to 0} \sqrt{x} = -3 \times 0 = 0.$$

Exemple 53 : Soit $g(x) = x^3 \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc $D_g = \mathbb{R}^+_*$ alors...

$$... \lim_{x \to 0} \left(x^3 \times \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \to 0} x^3 \times \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} : \text{FI du type } 0 \times (\pm)\infty.$$

$$... \lim_{x \to +\infty} \left(x^3 \times \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \to +\infty} x^3 \times \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} : \text{FI du type } (+\infty) \times 0.$$

3. **Limite de** $\dfrac{f}{g}$

Exemple 54 : Soit $f(x) = \dfrac{-3x}{x^2 + 100}$ donc $D_f = \mathbb{R}$ alors...

$$... \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-3x}{x^2 + 100} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x)}{\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 100)} : \text{FI du type } \frac{-\infty}{+\infty}.$$

$$... \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-3x}{x^2 + 100} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x)}{\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 100)} : \text{FI du type } \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Exemple 55 : Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ donc $D_f = [-1; 0[\cup]0; +\infty[$ alors...

$$... \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1}}{\lim\limits_{x \to +\infty} x} : \text{FI du type } = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$... \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x+1}}{\lim\limits_{x \to 0^+} x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$... \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{\lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{x+1}}{\lim\limits_{x \to 0^-} x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$... \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x+1}}{\lim\limits_{x \to -1} x} = \frac{0}{-1} = 0 = f(-1)$$

5 Fonctions équivalentes

1. **Définition** : On dit que $f(x)$ et $g(x)$ sont équivalentes en x_0 si leur rapport tend vers 1 quand x tend vers x_0 avec $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = \pm\infty$.

   $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, noté $f(x) \sim_{x_0} g(x)$.

   Quand deux fonctions sont équivalentes cela implique qu'elles ont la même limite.

   Théorèmes (à connaitre) :
   Un polynôme est équivalent à son monôme de plus bas degré quand x tend vers 0 ;
   Un polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré quand x tend vers ∞.

2. **Propriété des équivalents :**
   (a) Si $f(x) \sim_a g(x)$ et $g(x) \sim_a h(x)$ alors $f(x) \sim_a h(x)$.
   (b) Si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$ alors $f_1 \times f_2 \sim_a g_1 \times g_2$.
   (c) Si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$ alors $\dfrac{f_1}{f_2} \sim_a \dfrac{g_1}{g_2}$.
   (d) Si $f_1 \sim_a g_1$ alors $f_1^\alpha \sim_a g_1^\alpha$ avec $\alpha \in R$.

   (e) **Attention :** $f_1 \sim_a g_1$ **et** $f_2 \sim_a g_2$ **n'implique pas** $f_1 + f_2 \sim_a g_1 + g_2$**.**
   (f) **Attention :** $f_1 \sim_a g_1$ **et** $f_2 \sim_a g_2$ **n'implique pas** $f_1 - f_2 \sim_a g_1 - g_2$**.**

Exemple 56 : Soit $f(x) = 2x^2 - 3x + 12$ alors $\lim\limits_{x\to 0} \left(2x^2 - 3x + 12\right) = 0 - 0 + 12 = 12 = f(12)$.
En utilisant les équivalents, on peut écrire $2x^2 - 3x + 12 \sim_0 12$. (On rappelle que 12 est le monôme de plus bas degré. En effet, $12 = 12x^0$).

Montrons que l'équivalent est correct.
Dire que $2x^2 - 3x + 12 \sim_0 12$ implique que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 - 3x + 12}{12} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{12} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{12} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{12}{12} = 0 - 0 + 1 = 1$.

6 Détermination des limites en présence de formes indéterminées ?

On rappelle, d'une part, que les formes indéterminées sont $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$ et, d'autre part, qu'une forme indéterminée ne signifie pas que la limite n'existe pas, mais qu'on ne peut pas la déterminer sans calculs supplémentaires.

Il existe plusieurs méthodes pour lever les indéterminations. (voir chapitre sur la dérivation pour la méthode de l'Hospital)

6.1 Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$

Dans ce cas, on détermine une fonction équivalente dont on connait la limite ou on réécrit la fonction sous une forme qui permet de la calculer, le plus souvent en utilisant la factorisation du numérateur et du dominateur.

Exemple 57 : Dans un exemple précédent, nous avions : $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{-3x}{x^2 + 100}\right) = \dfrac{-\infty}{+\infty}$.

1reméthode : on factorise numérateur et dénominateur par le terme du plus haut degré :
$f(x) = \dfrac{-3x}{x^2 + 100} = \dfrac{x \times (-3)}{x^2 \times (1 + \frac{100}{x^2})} = \dfrac{-3}{x \times (1 + \frac{100}{x^2})}$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{-3x}{x^2 + 100}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{-3}{x \times (1 + \frac{100}{x^2})}\right) = \dfrac{-3}{+\infty \times (1 + 0)} = \dfrac{-3}{+\infty} = 0^-$

2eméthode : on cherche l'équivalent du numérateur et du dénominateur et on divise ces équivalents afin de simplifier (voir partie 5) :
$-3x \sim_{+\infty} -3x$ et $x^2 + 100 \sim_{+\infty} x^2$ donc $\dfrac{-3x}{x^2 + 100} \sim_{+\infty} \dfrac{-3x}{x^2} = \dfrac{-3}{x}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-3}{x} = 0^-$.

Exemple 58 : Dans un exemple précédent, nous avions : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}}{\lim\limits_{x\to+\infty}x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

On cherche un équivalent pour le numérateur : $\sqrt{x+1}=\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}=\sqrt{x}\times\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\sqrt{x}\times\sqrt{1+x^{-1}}$ donc $\sqrt{x}\times\sqrt{1+x^{-1}}\sim_{+\infty}\sqrt{x}$.

Vérification de l'équivalent : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}\times\sqrt{1+x^{-1}}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^{-1}}=\sqrt{1}=1$.
On peut désormais calculer la limite :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=0^+.$$

6.2 Forme indéterminée $\infty-\infty$.

Dans ce cas, on détermine une fonction équivalente, soit en factorisant par le terme dominant puis en simplifiant, soit en utilisant la règle des équivalents des polynômes en l'infini. Enfin, lorsque la fonction est de la forme $\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, il est alors possible de multiplier par la quantité conjuguée $\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)$ ce qui permet d'éliminer les racines au numérateur. Dans certains cas cela suffit pour lever l'indétermination. Dans d'autres cas, il faudra en plus appliquer une autre méthode (équivalents, factorisation, règle de l'Hospital...).

La **quantité conjuguée** de $a-b$ est $a+b$ ainsi $(a-b)=\dfrac{(a-b)(a+b)}{a+b}=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$.
En posant $a=\sqrt{f(x)}$ et $b=\sqrt{g(x)}$, alors $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\dfrac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}$.

Exemple 59 : Dans un exemple précédent, nous avions : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty-\infty$. Pour lever l'indétermination, on factorise par le terme du plus haut degré c'est-à-dire x^2.

$$x^2-\sqrt{x}=x^2-\frac{x^2\sqrt{x}}{x^2}=x^2-\frac{x^2\times x^{\frac{1}{2}}}{x^2}=x^2-\frac{x^2}{x^{2-\frac{1}{2}}}=x^2-\frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}=x^2\left(1-x^{\frac{-3}{2}}\right)\text{ donc}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-x^{\frac{-3}{2}}\right)=+\infty(1-0)=+\infty.$$

Exemple 60 : Soit $f(x)=2x^3-6x^2+3x+1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3-6x^2+3x+1\right)=\infty-\infty+\infty+1$. On peut factoriser par le terme du plus haut degré mais il est plus rapide d'appliquer la règle des équivalents à un polynôme : $f(x)=2x^3-6x^2+3x+1\sim_{\infty}2x^3$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$.

Exemple 61 : Soit $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\infty-\infty$. Or, il n'existe pas de terme dominant et on ne peut pas utiliser les équivalents qui ne s'additionnent pas. Dans ce cas, on multiplie le numérateur et le dominateur par la **quantité conjuguée** :

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{(\sqrt{x^2+1})^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0^+.$$

Si l'indétermination repose sur une (ou des) fonctions comprenant des racines carrées alors pensez à utiliser la quantité conjuguée.

6.3 Forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ quand x tend vers a avec $a \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas, le dénominateur et le numérateur s'annulent quand $x = a$. Donc a est une racine du numérateur et du dénominateur. On factorise par $(x - a)$ ou on utilise les quantités conjuguées.

Exemple 62 : Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ donc $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x)$ sont des formes indéterminées du type $\dfrac{0}{0}$. On cherche à factoriser le numérateur et le dénominateur pas $(x - 2)$. Les deux racines du trinôme $x^2 + x - 6 = 0$ sont $x = 2$ et $x = -3$ donc $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$.

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)} = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (x+3) = 5 \text{ et } \lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)} = \lim_{x \longrightarrow 2^-} (x+3) = 5.$$

Exemple 63 : Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ donc $D_f = [0; 1[\cup]1; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x)$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$. On utilise la quantité conjuguée du numérateur.

$\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ donc

$\lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$

6.4 Forme indéterminée $0 \times \infty$.

En général, face à ce type d'indétermination, il suffit de développer l'expression afin de faire apparaitre des formes connues de limites.

Exemple 64 : Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}(1 + \sqrt{x})$ donc $D_f =]0; +\infty[$. On constate que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$ est une forme indéterminée du type $0 \times \infty$. On développe l'expression :

$$\frac{1}{x}(1 + \sqrt{x}) = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ donc } \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 0$$

7 Asymptotes horizontale et verticale

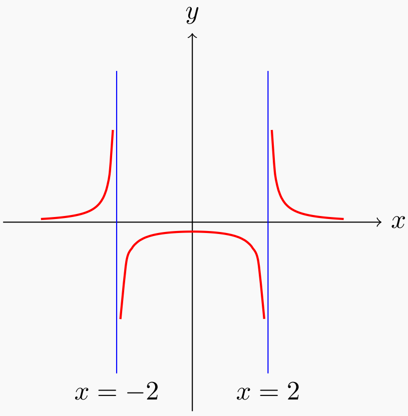
7.1 Définitions et équations des asymptotes

Le graphe d'une fonction $f(\cdot)$ admet une **asymptote horizontale**[2] d'équation $y = b$ quand x tend vers $\pm\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$. Le graphe de la fonction se rapproche de plus en plus de cette droite horizontale sans jamais l'atteindre (à la différence d'une tangente qui a un point commun avec le graphe).

Le graphe d'une fonction $f(\cdot)$ admet une **asymptote verticale** d'équation $x = x_0$ quand x tend vers une borne ouverte et finie x_0 de son domaine de définition lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$. Le graphe de la fonction se rapproche de plus en plus de cette droite verticale sans jamais l'atteindre.

2. Vous trouverez une fiche sur les asymptotes obliques sur l'EPI

Exemple 65 : Asymptotes verticales et horizontale



$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

$D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ donc le graphe de la fonction admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$;

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ donc le graphe de la fonction admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$;

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ donc le graphe de la fonction admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$;

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ donc le graphe de la fonction admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$ donc le graphe de la fonction admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$ donc le graphe de la fonction admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

7.2 Comment déterminer la position en $\pm\infty$ de la courbe par rapport à une asymptote horizontale ?

Tout d'abord, vous remarquerez que cette question ne se pose pas pour les asymptotes verticales !

Est-ce que la courbe est en dessous ou au-dessus de l'asymptote horizontale d'équation $y = b$?
On sait que la courbe et l'asymptote se rapprochent l'une de l'autre sans jamais avoir de point commun.
En d'autres termes, $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} (f(x) - b) = 0$. Il faut préciser si l'écart entre la courbe et la droite se réduit par valeurs inférieures ou valeurs supérieures. Ainsi...
...si $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} (f(x) - b) = 0^+$ alors la courbe est au-dessus de l'asymptote.
...si $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} (f(x) - b) = 0^-$ alors la courbe est en dessous de l'asymptote.

Exemple 66 : Soit $f(x) = \dfrac{3x}{x+4}$. On remarque que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 3$ donc le graphe de la fonction admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$.

Pour savoir si la courbe est en dessous ou au-dessus de cette droite horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$, on calcule :
$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-12}{x+4} = 0^-$. La courbe est en dessous de la droite d'équation, $y = 3$, en $+\infty$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - 3) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-12}{x+4} = 0^+$. La courbe est au-dessus de la droite d'équation, $y = 3$, en $-\infty$.

Le graphe de cette fonction admet aussi une asymptote verticale d'équation $x = 4$.

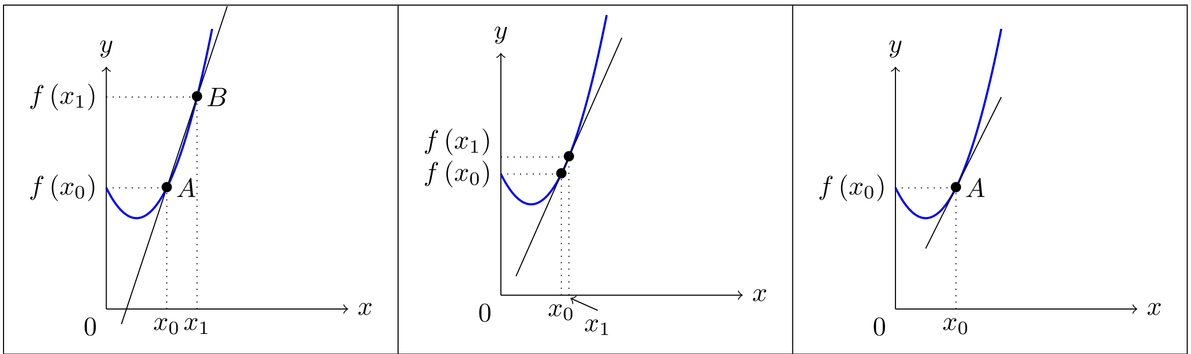
Chapitre 4

Dérivées et applications de la dérivation.

1 Définitions

1.1 Représentation graphique du problème

Soient les points $A = (x_0, f(x_0))$ et $B = (x_1, f(x_1))$



Graphique 1	Graphique 2	Graphique 3

Graphique 1 : A partir du point A, un accroissement des abscisses, $\Delta x = x_1 - x_0$, entraine une variation (ici, un accroissement) des ordonnées $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$. Cet accroissement conduit au point B.

La variation totale de y est : $f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ car $x_1 = x_0 + \Delta x$.

Donc la **variation moyenne par unité supplémentaire de** x de la fonction f entre les points A et B est donnée par l'expression : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = t_{\Delta x}(x_0) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Quand $x = x_0$, si la valeur de x augmente de Δx alors la valeur de la fonction augmente en moyenne de $t_{\Delta x}(x_0)$ unité(s) par unité supplémentaire de x.

Graphique 2 : Idem mais on réduit la variation de Δx. La pente de la droite change donc la variation moyenne par unité change.

Graphique 3 : On suppose que Δx tend vers 0 c'est-à-dire une variation infinitésimale des abscisses. Ainsi, les points A et B sont quasiment confondus. La droite (AB) se confond avec la **tangente** en A. Il s'agit d'une droite qui a le point A comme unique point commun avec la courbe de f. Le coefficient directeur de la tangente au point A est $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ avec $\Delta x \to 0$. Il s'agit donc d'une limite :

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} = f'(x_0)$. Cette limite représente le nombre dérivé en x_0.

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un point de I. Une fonction f est dérivable en x_0 si la variation moyenne unitaire $\dfrac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 c'est-à-dire pour $\Delta x \to 0$. La limite s'appelle alors **le nombre dérivé de f en x_0** et est notée $f'\left(x_0\right)$.

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

Quand $x = x_0$ alors la valeur de la fonction augmente en tendance de $f'(x_0)$ unité(s) par unité supplémentaire de x.

Exemple 67 : Le nombre dérivé de la fonction racine carrée, $f\left(x\right) = \sqrt{x}$, en x_0 est :

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right) \times \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\Delta x \times \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}.$$

On utilise les quantités conjuguées pour simplifier l'expression.

$$= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x \times \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2 \times \sqrt{x_0}}$$

La dérivée en un point est un nombre que l'on peut calculer parfois en utilisant la définition mais le plus souvent à partir de formules à apprendre par cœur (voir ci-dessous).

1.2 Nombre dérivé et équation de la tangente en x_0

Lorsque la fonction f est dérivable en x_0, la courbe représentative de la fonction f admet au point $A = \left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ une **tangente** qui est une droite d'équation $y = ax + b$ dont on peut déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine à partir des deux propriétés suivantes :
...la courbe et la tangente ont la même pente en x_0 : on en déduit $a = f'\left(x_0\right)$.
...le point A est, à la fois, sur la courbe de la fonction et sur la tangente : $f\left(x_0\right) = a \times x_0 + b$. Sachant que $a = f'(x_0)$, on peut alors en déduire la valeur de b : $b = f\left(x_0\right) - f'\left(x_0\right) \times x_0$.
On peut alors écrire l'équation de la tangente en x_0 :

$$y = f'\left(x_0\right) \times x + f\left(x_0\right) - f'\left(x_0\right) \times x_0$$

$$\boldsymbol{y = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)}$$

Si $f'\left(x_0\right) = 0$ alors la tangente est horizontale c'est-à-dire qu'elle est parallèle à l'axe des abscisses (voir section 3.5).

Exemple 68 : L'équation de la tangente en $x = 1$ de la fonction carrée, $f(x) = x^2$ est :
$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f'(1) = 2 \times 1 = 2$ car $f'(x) = 2x$ (voir tableau page suivante) et $f(1) = 1^2 = 1$ donc $y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$.

Exemple 69 : L'équation de la tangente en $x = 0$ de la fonction carrée, $f(x) = x^2$ est :
$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f'(0) = 2 \times 0 = 0$ et $f(0) = 0^2 = 0$ donc $y = 0$. La tangente se confond avec l'axe des abscisses.

Exemple 70 : L'équation de la tangente en $x = 1$ de la fonction racine carrée, $f(x) = \sqrt{x}$ est :
$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = \sqrt{1} = 1$ donc $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 1 = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

1.3 La fonction dérivée

On calcule rarement la dérivée d'une fonction en un point. On la calcule généralement sur son domaine de définition. Si $\forall x \in I$, un intervalle ouvert et si $f'(x)$ existe en tout point de I alors on appelle **fonction**

dérivée de f sur I, la fonction : $f' : x \to f'(x)$ avec $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Ce qu'il faut bien comprendre. C'est qu'une fonction dérivée provient d'une autre fonction. C'est-à-dire qu'elle a son propre domaine de définition. En d'autres termes, le domaine de définition de f' n'est pas nécessairement identique au domaine de définition de f.

Exemple 71 : La fonction racine carrée, $f(x) = \sqrt{x}$ et sa fonction dérivée n'ont pas le même domaine de définition.
$f(x) = \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ alors que sa dérivée, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, est définie sur $\mathbb{R}^+_*$.

Exemple 72 : La fonction $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}} + 2$ est définie sur $\mathbb{R}$ alors que sa fonction dérivée $f'(x) = \dfrac{2}{3} \times (x-2)^{\frac{-1}{3}}$ est définie sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

Dérivées usuelles.

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \times x^{n-1}$	$f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$	$f'(x) = -n \times x^{-n-1}$
$u(x) + v(x)$	$u(x)' + v(x)'$	$k \times u(x)$ avec $k \in \mathbb{R}$	$k \times u(x)'$
$u(x) \times v(x)$	$u(x)' \times v(x) + u(x) \times v(x)'$	$\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $v(x) \neq 0$	$\dfrac{u(x)' \times v(x) - u(x) \times v(x)'}{v(x)^2}$

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes en appliquant les formules :

Exemple 73 : $f_1(x) = 6$ alors $f_1'(x) = 0$. La dérivée d'une constante est nulle. En effet, les variations des antécédents n'ont aucun effet sur les images puisque $f(x)$ est toujours égale à 6.

Exemple 74 : $f_2(x) = 4x - 4$ alors $f_2'(x) = 4$. Le coefficient directeur de la droite se confond avec la dérivée.

Exemple 75 : $f_3(x) = 5x^3 - 6x^2 + 3x - 10$ alors $f_3'(x) = 15x^2 - 12x + 3$. La dérivée d'une somme est la somme des dérivées.

Exemple 76 : $f_4(x) = \dfrac{x-4}{2x^2+5x}$ alors
$f_4'(x) = \dfrac{(1) \times (2x^2+5x) - (x-4) \times (4x+5)}{(2x^2+5x)^2} = \dfrac{-2(x^2-8x-10)}{(2x^2+5x)^2}$

Exemple 77 : $f_5(x) = (3x^2+4x)(5x-1)$ alors
$f_5'(x) = (6x+4)(5x-1) + (3x^2+4x)(5) = 45x^2 + 34x - 4$

1.4 Dérivées et élasticités

Pour mémoire, la dérivée mesure la variation tendancielle de $y = f(x)$ par unité supplémentaire de x. L'élasticité est un indicateur qui porte sur les variations relatives.

$$\epsilon = \frac{Variation\ en\ \%\ de\ y}{Variation\ en\ \%\ de\ x} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Pour une fonction définie et dérivable sur son domaine de définition $y = f(x)$, l'élasticité se calcule à partir d'une variation infinitésimale de x : $\Delta x \to 0$.

Reprenons la définition de l'élasticité : $\epsilon(x) = \dfrac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$ que l'on peut écrire $\epsilon(x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \times \dfrac{x}{y}$. Avec $\Delta x \to 0$.

Par définition : on sait que la limite : $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. On en déduit la définition suivante (à connaitre par cœur) de l'élasticité d'une fonction $f(x)$:

$$\epsilon(x) = x \times \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Par exemple, si $\epsilon(x_0) = 4$, on dit : "quand $x = x_0$, y varie en tendance de 4% par point de % supplémentaire de x".

Exemple 78 : Soit la fonction : $f(x) = 5 - x^2$ définie. Calculer son élasticité pour $x = 1$ et interpréter le résultat.

- On calcule l'élasticité pour $x \in D_f$ quelconque à partir de sa dérivée : $f'(x) = -2x$ en appliquant la formule de l'élasticité : $\epsilon = x \times \dfrac{-2x}{5-x^2} = \dfrac{-2x^2}{5-x^2}$
- On calcule sa valeur pour $x = 1$: $\epsilon(1) = -0,5$.
- On peut dire que quand $x = 1$, y baisse en tendance de 0,5% par point de pourcentage supplémentaire de x.

1. **Fonction isoélastique :**
   Soit la fonction de demande $f(x) = ax^k$ avec $k \in \mathbb{R}$. L'élasticité de $f(x)$ est constante. On dit que c'est une fonction isoélastique : $\epsilon(x) = x \times \dfrac{a \times k \times x^{k-1}}{a \times x^k} = \dfrac{k \times x^k}{x^k} = k$.
2. **Propriétés des élasticités** (cf. exercice TD) :
   (a) Soit $u(x) = f(x) \times g(x)$ alors l'élasticité de $u(x)$ est la somme des élasticités de $f(x)$ et de $g(x)$.
   (b) Soit $u(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ alors l'élasticité de $u(x)$ est la différence des élasticités de $f(x)$ et de $g(x)$.

1.5 Dérivée des fonctions composées ou dérivée en chaîne

Soit une fonction composée : $h(x) = g \circ f(x) = g[f(x)]$ alors $h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$.
Il faut s'assurer que f soit dérivable en x et g soit dérivable en $f(x)$. Les dérivées des fonctions composées se calculent plus rapidement avec la formule suivante : $[u(x)^n]' = n \times u(x)' \times u(x)^{n-1}$

Exemple 79 : $f_6(x) = (4x^2 + x - 7)^3$ alors $f_6'(x) = 3 \times (8x+1) \times (4x^2 + x - 7)^2$
Remarque : La fonction $f_6(x)$ est une fonction composée $(g_1 \circ g_2)(x)$ avec $g_1(x) = x^3$ et $g_2(x) = 4x^2 + x - 7$ donc $(g_1 \circ g_2)'(x) = g_1'(g_2(x)) \times g_2'(x) = 3 \times (g_2(x))^2 \times (8x+1) = 3 \times (4x^2 + x - 7)^2 \times (8x+1)$.

Exemple 80 : $f_7(x) = \sqrt{x^3+4}$. On remarque que $f_7(x) = \sqrt{x^3+4} = \left(x^3+4\right)^{\frac{1}{2}}$ ainsi $f_7'(x) = \dfrac{1}{2} \times (3x^2) \times \left(x^3+4\right)^{\frac{-1}{2}} = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+4}}$
Remarque : La fonction $f_7(x)$ est une fonction composée $(g_1 \circ g_2)(x)$ avec $g_1(x) = \sqrt{x}$ et $g_2(x) = x^3 + 4$ donc $(g_1 \circ g_2)'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{g_2(x)}} \times 3x^2$.

1.6 Continuité et dérivabilité

Si f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a. Si f est dérivable sur un intervalle I alors la fonction f est continue sur I. Attention, la réciproque est fausse c'est-à-dire qu'une fonction continue en a ou sur un intervalle I n'est pas toujours dérivable en a ou en J (**voir EPI : fiche sur la continuité**).

2 Dérivées d'ordre supérieur

$f'(x)$ est la fonction dérivée première. Comme c'est une fonction, elle peut à son tour être dérivable : si $f'(x)$ est dérivable sur un intervalle I alors :
$(f'(x))' = f''(x) = \lim\limits_{\Delta x \longrightarrow 0} \dfrac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$. C'est la **dérivée seconde**.
Et, ainsi de suite pour $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$,..., $f^{(n)}(x)$.

On dit que la valeur de la dérivée $f'(x)$ varie en tendance de $f''(x)$ unité(s) par unité supplémentaire de x. La dérivée seconde permet de caractériser la courbure du graphe de $f(\cdot)$ (voir S1 et section 3.4).

Exemple 81 : Soit $f(x) = x^4 + 2x + 3$. Calculer les dérivées successives de $f(x)$ si elles existent.

1. $f'(x) = 4x^3 + 2$
2. $f''(x) = 12x^2$
3. $f'''(x) = 24x$
4. $f^{(4)} = 24$
5. $f^{(5)} = 0$
6. $f^{(n)} = 0$, $\forall n \geq 5$.

3 Applications de la dérivation : calculs de limites, sens de variation, extremums, convexité et point d'inflexion.

3.1 Calcul de limites avec les dérivées : Règle de l'Hospital

La règle de l'Hospital [1] permet de calculer des limites pour les cas d'indétermination suivants : $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$:

Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$ et si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \delta$ avec $\delta \in \mathbb{R}$ ou $\delta = \pm\infty$ alors
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \delta$.

Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$ alors il faut à nouveau dériver le numérateur et le dénominateur puis calculer la limite. Ainsi, si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = \delta$ avec $\delta \in \mathbb{R}$ ou $\delta = \pm\infty$ alors
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = \delta$.

...

On peut dire que le quotient des dérivées se comporte à la limite comme le quotient des fonctions.

Exemple 82 : La limite suivante $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$ est une forme indéterminée avec $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{0}{0}$.
Avec $f(x) = x - \sqrt{x}$ donc $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ donc $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{+\infty} = 0^+$. La limite est finie donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

1. Guillaume de l'Hospital (1661-1704) est le premier à l'avoir publié. Cependant, il y a de sérieuses raisons de penser que l'auteur véritable est le suisse Jean Bernoulli (1667-1748).

Exemple 83 : La limite suivante $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+x}{2x^3+12}$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Avec $f(x) = x^3 + x$ donc $f'(x) = 3x^2 + 1$ et $g(x) = 2x^3 + 12$ donc $g'(x) = 6x^2$ alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{3x^2+1}{6x^2} = \dfrac{\infty}{\infty}$ donc on continue de dériver le numérateur et le dénominateur :

$\lim\limits_{x\longrightarrow+} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = \dfrac{6x}{12x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ donc on continue de dériver le numérateur et le dénominateur :
$\lim\limits_{x\longrightarrow+} \dfrac{f'''(x)}{g'''(x)} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\longrightarrow+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Remarque : La méthode des équivalents (voir exemple 57) des polynômes permet d'aller beaucoup plus vite !

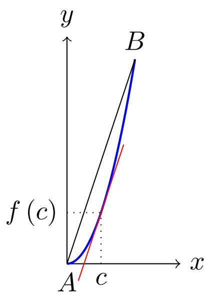
3.2 Sens de variation

Théorème des accroissements finis (TAF)

Le **théorème des accroissements finis** permet de faire le lien entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée.

Théorème de accroissements finis.

Si une fonction est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f^{'}(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



∗ Il existe au moins un point du graphe de f sur l'intervalle $]a, b[$ où la tangente est parallèle à la droite (AB). Avec $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$

∗ La tangente au point d'abscisse c est parallèle à la sécante (AB).

∗ La sécante (AB) a pour pente $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Exemple 84 : Soit $f(x) = -x^3 + x$.

1. Peut-on appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur $[-2; 1]$?
   On vérifie les conditions du théorème : $f(x)$ est définie et continue sur $[-2; 1]$ et dérivable sur $]-2; 1[$.
2. Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f.
   Les conditions sont respectées donc il existe au moins une valeur c de l'intervalle $]-2; 1[$ telle que $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} \Rightarrow f'(c) = -2$.
   Pour déterminer la ou les valeurs de c, on calcule la dérivée de f : $f'(x) = -3x^2 + 1$.
   $f'(c) = -2 \Leftrightarrow -3c^2 + 1 = -2 \Rightarrow c = \pm 1$. Or, $1 \notin]-2; 1[$ donc $c = -1$.

3.3 Signe de la dérivée et sens de variation (Rappel S1)

Dérivées et sens de variation.

Soit $f : D_f = I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I fermé et dérivable sur I ouvert alors :

1. Si $\forall x \in I$ ouvert, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur I ouvert ;
2. Si $\forall x \in I$ ouvert, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante sur I ouvert ;
3. Si $\forall x \in I$ ouvert, $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I ouvert ;
4. Si $\forall x \in I$ ouvert, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$est strictement croissante sur I ouvert ;
   Attention, la réciproque est fausse. La fonction cube, $f(x) = x^3$, admet une dérivée nulle en $x = 0$ et est strictement croissante (cf. ci-dessous pour la réponse).
5. Si $\forall x \in I$ ouvert, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur I ouvert.
   La réciproque est fausse.

Déterminer, à partir de la fonction dérivée, le sens de variation des fonctions suivantes. (Il s'agit des fonctions dont les dérivées ont été calculées précédemment).

85) $f_1(x) = 6$
86) $f_2(x) = 4x - 4$
87) $f_3(x) = 5x^3 - 6x^2 + 3x - 10$
88) $f_4(x) = \dfrac{x-4}{2x^2+5x}$
89) $f_5(x) = (3x^2 + 4x)(5x - 1)$
90) $f_6(x) = (4x^2 + x + 7)^3$
91) $f_7(x) = \sqrt{x^3 + 4}$

Exemple 85 : $f_1(x) = 6$ alors $f_1'(x) = 0$. La fonction est constante sur son domaine de définition.

Exemple 86 : $f_2(x) = 4x-4$ alors $f_2'(x) = 4 > 0$. La fonction est strictement croissante sur son domaine de définition.

Exemple 87 : $f_3(x) = 5x^3 - 6x^2 + 3x - 10$ alors $f_3'(x) = 15x^2 - 12x + 3 = 3(5x^2 - 4x + 1) = 3P(x)$. Pour étudier le signe de $f_3'(x)$, on calcule le discriminant de $P(x)$: $\Delta = (-4)^2 - 4\times 5\times 1 = 16 - 20 < 0$ donc $P(x)$ est toujours strictement positif : $f_3'(x) > 0$. La fonction est strictement croissante sur son domaine de définition.

Exemple 88 : $f_4(x) = \dfrac{x-4}{2x^2+5x}$ avec $D_f = \left]-\infty; \frac{-5}{2}\right[\cup \left]\frac{-5}{2}; 0\right[\cup]0; +\infty[$ alors

$f_4'(x) = \dfrac{-2(x^2 - 8x - 10)}{(2x^2+5x)^2}$ avec $D_{f'} = D_f$.

On remarque que la fonction dérivée n'est pas définie quand $x = 0$ et $x = -2,5$: valeurs qui annulent le dénominateur. Il faudra s'en souvenir lorsque l'on établira le tableau de signes.

Étude du signe de la dérivée : Le dénominateur sera toujours positif sur le domaine de définition puisqu'il s'agit d'un carré. Le signe de $f_4'(x)$ dépend exclusivement de celui du numérateur. On calcule le discriminant de $P(x) = x^2 - 8x - 10$: $\Delta = 104$, et les racines :

$x' = \dfrac{8-\sqrt{104}}{2} = \dfrac{8-2\sqrt{26}}{2} = 4 - \sqrt{26} \simeq -1,1$ et $x'' = \dfrac{8+\sqrt{104}}{2} = \dfrac{8+2\sqrt{26}}{2} = 4 + \sqrt{26} \simeq 9,1$.

Le tableau de signes ci-dessous permet de conclure sur le signe de la dérivée :

x		-2,5		-1,1		0		9,1	
$x^2 - 8x - 10$	+		+	0	-		-	0	+
$-2(x^2 - 8x - 10)$	-		-	0	+		+	0	-
$f_4'(x)$	-	||	-	0	+	||	+	0	-

La fonction sera décroissante sur $]-\infty; -2,5[\cup \left]-2,5; 4-\sqrt{26}\right] \cup \left[4+\sqrt{26}; +\infty\right[$ et croissante sur $\left[4-\sqrt{26}; 0\right[\cup \left]0; 4+\sqrt{26}\right]$.

Exemple 89 : $f_5(x) = (3x^2+4x)(5x-1)$ alors $f_5'(x) = (6x+4)(5x-1)+(3x^2+4x)(5) = 45x^2+34x-4$.
Même méthode que dans le cas précédent.

Exemple 90 : $f_6(x) = (4x^2+x+7)^3$ alors $f_6'(x) = 3 \times (8x+1) \times (4x^2+x+7)^2$

Le signe de $f_6'(x)$ ne dépend que du signe de $8x+1$ car les autres facteurs sont strictement positifs. Donc $f_6'(x) \geq 0$ quand $8x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{-1}{8}$.
Ainsi, la fonction est décroissante sur $\left]-\infty; \dfrac{-1}{8}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{-1}{8}; +\infty\right[$.

Exemple 91 : $f_7(x) = \sqrt{x^3+4}$ alors $f_7'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+4}}$

Un carré et une racine carrée sont toujours positifs donc $f_7' \geq 0$ sur son domaine de définition et la fonction $f_7(x)$ est croissante sur son domaine de définition.

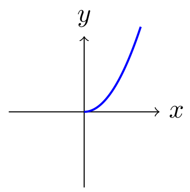
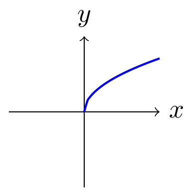
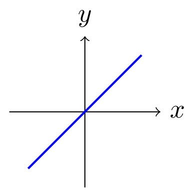
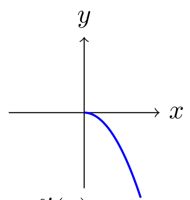
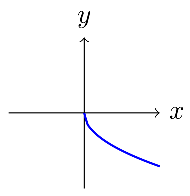
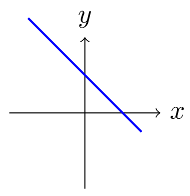
3.4 Convexité et concavité

Le signe de la dérivée première indique si la fonction croît, décroît ou est constante. Le signe de la dérivée seconde indique la tendance d'évolution de la dérivée et permet de préciser si la fonction est convexe, linéaire ou concave.

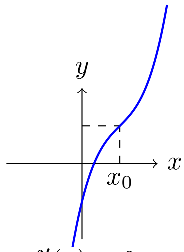
Définitions et interprétations

Les éléments développés dans cette section ont déjà été présentés au S1. Soit une fonction $f(\cdot)$ deux fois dérivables sur son domaine de définition.

Dérivée seconde, convexité/concavité et points d'inflexion

<table>
<tr><td>Cas 1

$f'(x) \geq 0$
$f''(x) \geq 0$</td><td>Cas 2

$f'(x) \geq 0$
$f''(x) \leq 0$</td><td>Cas 3

$f'(x) > 0$
$f''(x) = 0$</td></tr>
<tr><td>$f(\cdot)$ est croissante convexe</td><td>$f(\cdot)$ est croissante concave</td><td>$f(\cdot)$ est croissante affine</td></tr>
<tr><td>Cas 4

$f'(x) \leq 0$
$f''(x) \leq 0$</td><td>Cas 5

$f'(x) \leq 0$
$f''(x) \geq 0$</td><td>Cas 6

$f'(x) < 0$
$f''(x) = 0$</td></tr>
<tr><td>$f(\cdot)$ est décroissante concave</td><td>$f(\cdot)$ est décroissante convexe</td><td>$f(\cdot)$ est décroissante affine</td></tr>
</table>

Si,
(1) $f''(x_0) = 0$ et,
(2) la dérivée seconde change de signe en passant de droite à gauche de x_0,
alors le point critique est un **point d'inflexion**.



$f'(x) > 0$
$f''(x_0) = 0$
$f''(x_0) < 0$ quand $x < x_0$ (concave)
$f''(x_0) > 0$ quand $x > x_0$ (convexe)

Exemple 92 : Les fonctions suivantes sont-elles convexes ou concaves sur leur domaine de définition ?
a) $f(x) = 4x^2 - 5$.
$f'(x) = 8x$ et $f''(x) = 8 > 0$, $\forall x \in D_f$. Par conséquent, la fonction est convexe sur son domaine de définition.
b) $f(x) = \sqrt{x}$.
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$ (Attention, le domaine de définition de la fonction dérivée est différent du domaine de définition de la fonction) et $f''(x) = \dfrac{-1}{4}x^{\frac{-3}{2}} = \dfrac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$. Par conséquent la fonction est concave sur $\mathbb{R}_*^+$.
c) $f(x) = 4x - 5$.
$f'(x) = 4$ et $f''(x) = 0$. Par conséquent, la fonction est à la fois convexe et concave.

Exemple 93 : La fonction $f(x) = x^4$ admet-elle un point d'inflexion ?
On calcule la dérivée seconde : $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$.
On cherche les valeurs de x qui annulent la dérivée seconde : $f''(0) = 0$. Or, le point d'abscisse $x = 0$ n'est pas un point d'inflexion car $f''(x)$ ne change pas de signe en passant par 0. En effet, $f''(x) = 12x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire que la fonction est convexe sur l'ensemble de son domaine de définition.

Exemple 94 : La fonction $f(x) = x^3$ admet-elle un point d'inflexion ?
On calcule la dérivée seconde : $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.
On cherche les valeurs de x qui annulent la dérivée seconde : $f''(0) = 0$. Le point d'abscisse $x = 0$ est un point d'inflexion car $f''(x)$ change de signe en passant par 0. En effet, $f''(x) = 6x \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_-$ et $f''(x) = 6x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$. La fonction est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$.

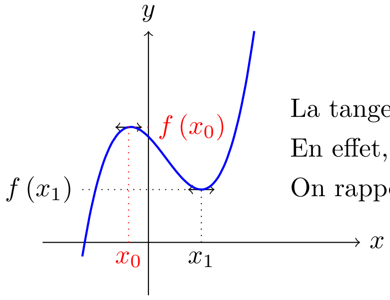
3.5 Extremum local : deux conditions

Soit I un voisinage ouvert du point x_0 :

1. Le point $(x_0; f(x_0))$ est un **maximum local au sens large** si $\forall x \in I$, $f(x_0) \geq f(x)$;
2. Le point $(x_0; f(x_0))$ est un **maximum local au sens strict** si $\forall x \in I$, $f(x_0) > f(x)$;
3. Le point $(x_0; f(x_0))$ est un **minimum local au sens large** si $\forall x \in I$, $f(x_0) \leq f(x)$;
4. Le point $(x_0, f(x_0))$ est un **minimum local au sens strict** si $\forall x \in I$, $f(x_0) < f(x)$.

Condition nécessaire d'existence des points candidats à un extremum local

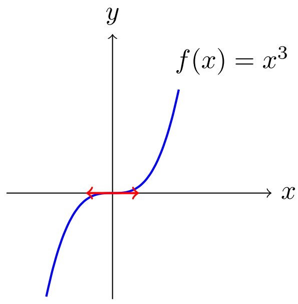
Soit $f(\cdot)$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. Si $f(\cdot)$ est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$ alors $(x_0; f(x_0))$ est un point candidat à un extremum local. **Cette condition est nécessaire mais non suffisante**.



La tangente est horizontale lorsque x_0 est un point candidat à un extremum local.
En effet, $f'(x_0) = 0$ est le coefficient directeur de la tangente en x_0.
On rappelle que $f'(x_0)$ est aussi le nombre dérivé en x_0.

La condition nécessaire n'est pas toujours suffisante. La fonction cube, $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet, $f'(x) = 3x^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cette dérivée s'annule au point d'abscisse $x = 0$. Cependant, la fonction n'admet ni maximum, ni minimum en ce point puisque la fonction est strictement croissante. C'est un point d'inflexion car $f''(x) = 6x$ donc $f''(0) = 0$ et $f''(x) < 0$ quand $x < 0$ et $f''(x) > 0$ quand $x > 0$.

Ainsi, la tangente est horizontale au point d'abscisse $x = 0$ mais ce n'est pas un extremum.



Déterminons les points candidats à un extremum local, s'ils existent, des fonctions suivantes. (Il s'agit des fonctions dont les dérivées ont été calculées précédemment).

Exemple 95 : $f_1(x) = 6$ alors $f_1'(x) = 0$. $\forall x \in D_{f_1}$, la dérivée première s'annule. Tous les éléments de l'ensemble de définition sont des points candidats ! Ils sont tous, à la fois, minimum et maximum locaux au sens large, mais aucun point n'est un minimum ou un maximum local au sens strict.

Exemple 97 : $f_2(x) = 4x - 4$ alors $f_2'(x) = 4 \neq 0$, $\forall x \in D_{f_2}$. La fonction n'admet pas de point candidat à un extremum local. Une fonction n'admet pas de point candidat lorsqu'elle est strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante) sur l'ensemble de son domaine de définition. Ce qui est le cas ici : $f_2'(x) > 0$, $\forall x \in D_f$.

Exemple 98 : $f_3(x) = 5x^3 - 6x^2 + 3x - 10$ alors $f_3'(x) = 15x^2 - 12x + 3$ et $f_3'(x) > 0$, $\forall x \in D_f$ (car $\Delta < 0$ donc ce polynôme est toujours du signe de a. ici, $a = 15$). Par conséquent, la fonction n'admet pas de point candidat à un extremum local car elle est strictement croissante sur son domaine de définition.

Exemple 99 : $f_4(x) = \dfrac{x-4}{2x^2+5x}$ alors $f_4'(x) = \dfrac{-2(x^2-8x-10)}{(2x^2+5x)^2}$.
Le dénominateur ne s'annulera jamais. Donc, $f_4'(x) = 0$ quand $x' = 4 - \sqrt{26} \simeq -1,1$ et $x'' = 4 + \sqrt{26} \simeq 9,1$. Il existe donc deux points candidats à un extremum local : $(-1,1; f_4(-1,1))$ et $(9,1; f_4(9,1))$.

Exemple 100 : $f_5(x) = (3x^2 + 4x) \times (5x - 1)$ alors $f_5'(x) = (6x + 4) \times (5x - 1) + (3x^2 + 4x) \times (5) = 45x^2 + 40x - 10 = 5(9x^2 + 8x - 2)$
On calcule le discriminant et on détermine les deux racines : $x' \backsimeq -1,1$ et $x'' \backsimeq 0,2$. Il existe donc deux points candidats à un extremum local : $(-1,1; f_5(-1,1))$ et $(0,2; f_5(0,2))$.

Exemple 101 : $f_6(x) = (4x^2 + x - 7)^3$ alors $f_6'(x) = 3(8x + 1) \times (4x^2 + x - 7)^2$
Un produit de facteurs est nul quand au moins un des facteurs est nul. Ainsi,

$$f_6'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 8x + 1 = 0 \\ 4x^2 + x - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -0,125 \\ x \backsimeq -1,5 \\ x \backsimeq 1,2 \end{cases}$$

Il existe donc trois points candidats à un extremum local.

Exemple 102 : $f_7(x) = \sqrt{x^3 + 4}$ alors $f_7'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 4}}$
$f_7'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. La fonction admet un seul point candidat.

Remarque : Étudier le sens de variation permet en même temps de déterminer les points candidats à un extremum local.

Caractérisation des points candidats à un extremum local

Les valeurs de x qui annulent la dérivée première sont les **points candidats à un extremum local**. Cette **condition est nécessaire** pour déterminer les extremums locaux : minimum ou maximum. **Mais, elle n'est pas suffisante** (pour être élu, il faut être candidat mais tous les candidats ne sont pas élus !). En d'autres termes, si $f'(x_0) = 0$ alors x_0 n'est pas nécessairement un minimum ou un maximum local.

Pour qu'un point candidat soit un extremum local, il faut que la dérivée change de signe en ce point. C'est-à-dire que la fonction soit croissante juste avant et décroissante juste après ou l'inverse. Par conséquent, l'étude du signe de la dérivée seconde au point candidat permettra de nous indiquer comment évolue la dérivée au voisinage du point candidat.

Nature des points candidats : Max et min locaux.

Soient $f(\cdot)$ une fonction définie de D_f dans $\mathbb{R}$ et un élément $x_0 \in D_f$, alors x_0 est un...

1. ...**maximum local au sens large** sur D_f, s'il existe $\Delta x > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \Delta x; x_0 + \Delta x[$, on a $f(x) \leq f(x_0)$.
   Au voisinage de x_0, $f(x_0)$ est supérieure ou égale à toutes les images par f issues de ce voisinage. La fonction est concave au voisinage de x_0. Cela signifie que la dérivée est décroissante au voisinage de x_0 en passant par 0 en x_0. La dérivée est donc positive avant x_0 (fonction croissante) et négative après x_0 (fonction décroissante).
   Si $f'(x_0) = 0$ et si $f''(x_0) < 0$ alors le point candidat est un **maximum local** en x_0.
2. ...**minimum local au sens large** sur I, s'il existe $\Delta x > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \Delta x; x_0 + \Delta x[$, on a $f(x) \geq f(x_0)$.
   Au voisinage de x_0, $f(x_0)$ est inférieure ou égale à toutes les images par f issues de ce voisinage. La fonction est convexe au voisinage de x_0. Cela signifie que la dérivée est croissante au voisinage de x_0 en passant par 0 en x_0. La dérivée est donc négative avant x_0 (fonction décroissante) et positive après x_0 (fonction croissante).
   Si $f'(x_0) = 0$ et si $f''(x_0) > 0$ alors le point candidat est un **minimum local** en x_0.
3. Si $f''(x_0) = 0$, on distingue deux cas :
   (a) Si la dérivée seconde ne change pas de signe en passant de gauche à droite de x_0 alors le point candidat est un point de **maximum local** si $f''(x) < 0$ à gauche et à droite de x_0 et c'est un **minimum local** si $f''(x) > 0$ à gauche et à droite de x_0. Exemple : $f(x) = x^4$ en $x_0 = 0$.
   (b) Si la dérivée seconde change de signe en passant de gauche à droite de x_0 alors le point candidat n'est pas un point d'extremum. Mais comme on l'a vu précédemment c'est un **point d'inflexion**. Exemple : $f(x) = x^3$ en $x_0 = 0$.

Extremums locaux et extremums globaux

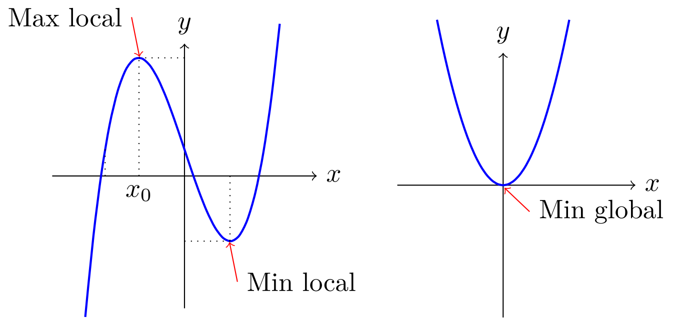
Alors qu'un extremum local est le point le plus haut (max) ou le plus bas (min) sur un voisinage, un extremum global est le point le plus haut ou le plus bas sur l'ensemble du domaine de définition. Un extremum local n'est donc pas toujours global.

Soient $f(\cdot)$ une fonction définie de D_f dans $\mathbb{R}$ et un élément $x_0 \in I$, alors x_0 est un...

1. ...**maximum global** sur D_f, si $\forall x \in D_f$ alors $f(x) \leq f(x_0)$.
   $f(x_0)$ est supérieure ou égale à toutes les images par f de D_f.

2. ...**minimum global** sur D_f, si $\forall x \in D_f$ alors $f(x) \geq f(x_0)$.
   $f(x_0)$ est inférieure ou égale à toutes les images par f de D_f.

   Pour déterminer les maximum et minimum globaux, il faut disposer du tableau de variation de la fonction, et notamment des limites aux bornes ouvertes du domaine de définition.



Quelle est la nature des points candidats à un extremum local pour les fonctions suivantes ?

Exemple 102 : $f(x) = \dfrac{(x-4)^2}{2x+5}$

On cherche la dérivée première afin de déterminer les points candidats à un extremum local : $f'(x) = \dfrac{2(x-4)(2x+5) - 2(x-4)^2}{(2x+5)^2} = \dfrac{2x^2+10x-72}{(2x+5)^2} = \dfrac{2(x^2+5x-36}{(2x+5)^2}$.

On calcule le discriminant de $P(x) = x^2 + 5x - 36$ d'où $\sqrt{\Delta} = 13$ et $x' = -9$ et $x'' = 4$. Il existe donc deux points candidats à un extremum local : $A = (-9; f(-9))$ et $B = (4; f(4))$. Afin de déterminer la nature de ces deux points candidats il faut calculer : $f''(-9)$ et $f''(4)$.

$$f''(x) = \frac{(4x+10)(2x+5)^2 - (2x^2+10x-72)(2)(2)(2x+5)}{((2x^2+5x)^2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{(4x+10)(2x+5) - 4(2x^2+10x-72)}{(2x+5)^3}$$
d'où $f''(x) = \dfrac{338}{(2x+5)^3}$

Soit $f''(-9) = \dfrac{338}{(-13)^3} < 0$ donc le point $A = (-9; f(-9))$ est un maximum local. Et $f''(4) = \dfrac{338}{(13)^3} > 0$ donc le point $B = (4; f(4))$ est un minimum local.

Exemple 103 : $g(x) = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 100$.

Alors $g'(x) = 3x^2 - 9x = x(3x - 9)$. Un produit de facteurs est nul quand au moins un des facteurs est nul. Ainsi,

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Il existe donc deux points candidats.
$g''(x) = 6x - 9$ d'où $g''(0) = -9$ donc le point $(0; 100)$ est un maximum local. Et, $g''(3) = 9$ donc le point $(3; \frac{133}{2})$ est un minimum local.

Chapitre 5

Fonctions exponentielle et logarithme népérien

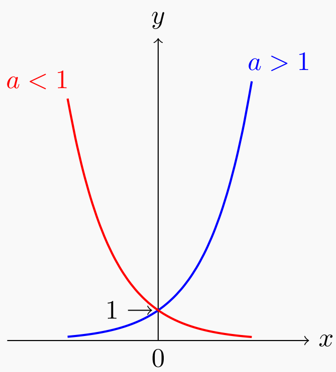
1 Définition et propriétés de la fonction exponentielle de base a.

On appelle **fonction exponentielle de base a** la fonction définie par $f(x) = b \times a^x$ pour tout $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Son domaine de définition est $\mathbb{R}$.

Remarque : il ne faut pas confondre les fonctions puissances $f(x) = x^n$ et les fonctions exponentielles $f(x) = a^x$ avec $a > 0$.

Exemple 104 : $f(x) = 3^x$ est une fonction exponentielle de base 3 : $f(0) = 3^0 = 1$; $f(1) = 3^1 = 3$; $f(2) = 3^2 = 9$; $f(3) = 3^3 = 27$...
Cette fonction traduit une croissance à taux constant.

$f(x) = 0,5^x$ est une fonction exponentielle de base $0,5$: $f(0) = 0,5^0 = 1$; $f(1) = 0,5^1 = 0,5$; $f(2) = 0,5^2 = 0,25$; $f(3) = 0,5^3 = 0,125$...
Cette fonction traduit une décroissance à taux constant.



Propriétés

1. $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
2. $a^0 = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$;
3. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$;
4. $a^x \times a^y = a^{x+y}$;
5. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
6. $(a^x)^y = a^{x \times y} = (a^y)^x$.

Parmi les fonctions exponentielles en base a, il en existe une qui a une propriété très intéressante : elle est égale à sa dérivée. Il s'agit de la fonction exponentielle en base e où e est un nombre irrationnel proche de $2,718$.

2 La fonction exponentielle de base e : $f(x) = e^x$.

La **fonction exponentielle en base** e est appelée plus simplement la fonction exponentielle.

Attention, e **ne signifie pas exponentielle**. C'est un nombre irrationnel $\boldsymbol{e = 2,718...}$.

2.1 Domaine de définition et ensemble des images de la fonction exponentielle

Le **domaine de définition** de $f(x) = e^x$ est $\mathbb{R}$ et l'ensemble des images est $]0; +\infty[$ donc la fonction exponentielle ne s'annule jamais et est strictement positive : $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2.2 Sens de variation et extremum

Cette fonction est **continue** et **dérivable** sur $\mathbb{R}$.

Parmi toutes les fonctions exponentielles en base a, c'est la seule fonction qui a pour dérivée elle-même : $(e^x)' = e^x$. Par conséquent (voir 2.1), $f'(x) > 0$ donc la fonction exponentielle est **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.

On en déduit...

1. ...que l'ordre est maintenu avec une exponentielle : $x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$; $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$ et $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$
2. ...qu'elle n'admet pas d'extremum local puisqu'elle est strictement croissante. En d'autres termes l'équation $f'(x) = e^x = 0$ n'admet pas de solution.
3. ...qu'elle n'admet pas d'extremum global. (voir limites 2.4)

2.3 Concavité/convexité et point d'inflexion

La fonction exponentielle est **convexe** sur $\mathbb{R}$ car $(e^x)'' = e^x > 0$.

2.4 Limites et asymptotes

Les **limites aux bornes du domaine de définition** sont $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

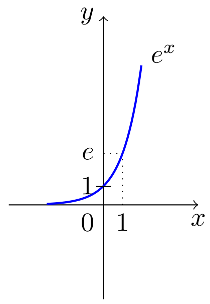
2.5 Propriétés de la fonction $f(x) = e^x$

.
Propriétés de la fonction $x \mapsto e^x$.

1. $e^x \times e^y = e^{x+y}$
2. $e^0 = 1$
3. $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
4. $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$
5. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
6. $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
7. $e^{nx} = (e^x)^n$
8. $(e^x)' = e^x > 0$: fonction croissante
9. $(e^x)'' = e^x > 0$: fonction convexe
10. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
11. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

2.6 Représentation graphique

L'ensemble des informations précédentes permet de représenter le **graphe** de la fonction $x \mapsto e^x$.



Exemple 105 : Soient $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2^x$ Calculer :

1) $f(0)$; $f(1)$; $g(0)$; $g(1)$

2) $f(2) \times f(3)$; $g(2) \times g(3)$ **3)** $f(x) \times f(y)$; $g(x) \times f(y)$

4) $\dfrac{f(2)}{f(3)}$; $\dfrac{g(2)}{g(3)}$ **5)** $\dfrac{f(x)}{f(y)}$; $\dfrac{g(x)}{g(y)}$

6) $(f(3))^2$; $(g(3))^2$ **7)** $(f(x))^y$; $(g(x))^y$

1) $f(0) = e^0 = 1$ et $f(1) = e^1 = e$; $g(0) = 2^0 = 1$ et $g(1) = 2^1 = 2$

2) $f(2) \times f(3) = e^2 \times e^3 = e^{2+3} = e^5 = f(5)$ donc $f(2) \times f(3) = f(5) = f(2+3)$.
$g(2) \times g(3) = 2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = g(5)$ donc $g(2) \times g(3) = g(5) = g(2+3)$.

3) $f(x) \times f(y) = e^x \times e^y = e^{x+y} = f(x+y)$ donc $f(x) \times f(y) = f(x+y)$.
$g(x) \times g(y) = 2^x \times 2^y = 2^{x+y} = g(x+y)$ donc $g(x) \times g(y) = g(x+y)$.
Une exponentielle transforme un produit en somme.

4) $\dfrac{f(2)}{f(3)} = \dfrac{e^2}{e^3} = e^{2-3} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$; $\dfrac{g(2)}{g(3)} = \dfrac{2^2}{2^3} = 2^{2-3} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

5) $\dfrac{f(x)}{f(y)} = \dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ donc $\dfrac{f(x)}{f(y)} = f(x-y)$; $\dfrac{g(x)}{g(y)} = \dfrac{2^x}{2^y} = 2^{x-y}$ donc $\dfrac{g(x)}{g(y)} = g(x-y)$.
Une exponentielle transforme un quotient en soustraction.

6) $(f(3))^2 = \left(e^3\right)^2 = e^{3\times 2} = e^6$
$(g(3))^2 = \left(2^3\right)^2 = 2^{3\times 2} = 2^6$

7) $(f(x))^y = (e^x)^y = e^{x\times y}$ donc $(f(x))^y = f(x \times y)$.
$(g(x))^y = (2^x)^y = 2^{x\times y}$ donc $(g(x))^y = g(x \times y)$.
Une exponentielle transforme une puissance en multiplication.

3 Fonction composée avec une exponentielle $f(x) = e^{u(x)}$

La fonction f définie par $x \mapsto e^{u(x)}$ est une fonction composée où $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec $g(x) = e^x$ et $h(x) = u(x)$ (voir chapitre 2).

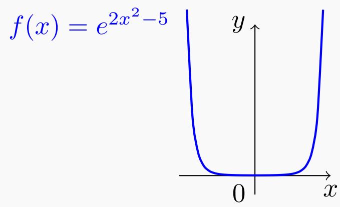
Sachant que la fonction $f(x) = e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$, on peut en déduire que la fonction $e^{u(x)}$ est définie quand $u(x)$ est définie donc son **domaine de définition** est celui de la fonction $u(x)$: $D_f = D_u$.

On rappelle que **la dérivée** d'une fonction composée est $(g \circ h)'(x) = g'\left[h(x)\right](x) \times h'(x)$ donc $f'(x) = e^{h(x)} \times h'(x)$. Avec la notation précédente : $\left(e^{u(x)}\right)' = u(x)' \times e^{u(x)}$.

Le calcul des limites fait souvent appel aux **théorèmes des croissances comparées** (voir 5.5).

Exemple 106 : Soit la fonction : $f(x) = e^{2x^2-5}$.

1. C'est une fonction composée du type $e^{u(x)}$ avec $u(x) = 2x^2 - 5$. La fonction $f(x)$ est définie quand $u(x)$ est définie. Donc, $D_f =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.
2. Afin de déterminer le sens de variation et le(s) extremum(s), on calcule la dérivée première : $f'(x) = 4x \times e^{2x^2-5}$.
   On sait que $e^{2x^2-5} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ donc $f'(x) > 0$ quand $x > 0$; $f'(x) < 0$ quand $x < 0$ et $f'(x) = 0$ quand $x = 0$.
   La fonction est décroissante sur $]-\infty; 0]$ puis croissante sur $[0; +\infty[$. Le point d'abscisse $x = 0$ est un point candidat à un extremum.
3. Pour connaitre la convexité de la fonction et la nature du point candidat, on calcule la dérivée seconde :
   $f'(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = 4x$ et $v(x) = e^{2x^2-5}$. Donc $f''(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = 4 \times e^{2x^2-5} + 4x \times 4x \times e^{2x^2-5}$. En factorisant, on obtient : $f''(x) = 4(1 + 4x^2)e^{2x^2-5}$.
   Tous les termes du produit sont positifs donc $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. La fonction est convexe sur la totalité de son domaine de définition. Le point candidat est donc un minimum global. Ce que l'on vérifie en calculant $f''(0) = \dfrac{4}{e^5} > 0$.
4. Les limites aux bornes du domaine sont $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$.



4 De la fonction exponentielle en base e à la fonction logarithme népérien : fonctions réciproques

4.1 Qu'est-ce qu'une fonction réciproque ?

La réciproque d'une fonction, notée f^{-1}, "fait le contraire" de la fonction initiale : si f est "*avancer de 2 pas*" alors f^{-1} est "*reculer de 2 pas*". Par conséquent, si l'on compose la fonction "avancer de deux pas" avec la fonction "reculer de deux pas" alors on revient au point de départ. La généralisation mathématique de ce résultat permet de dire que la composition de deux fonctions réciproques donne la fonction identité $f \circ f^{-1}(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, $\forall x$.

Conditions d'existence de la fonction réciproque.
Soit $f : I \to J$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des images est J un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est **continue** et **strictement monotone** (toujours croissante ou toujours décroissante) sur I, alors la **fonction réciproque** f^{-1} définie de J dans I est continue et strictement monotone (toujours croissante ou toujours décroissante) sur J et elle a le même sens de variation que f.

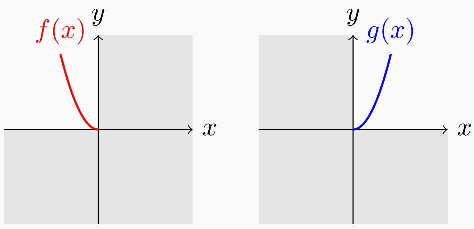
Remarque : Les conditions d'existence d'une fonction réciproque sont une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires [1] : Si une fonction continue est strictement monotone alors elle admet une fonction réciproque.

1. cf. fiche sur le TVI déposée sur l'EPI

Exemple 107 : Soit la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La fonction f est décroissante puis croissante sur $\mathbb{R}$. Donc, elle n'admet pas de fonction réciproque sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle n'est pas strictement monotone.

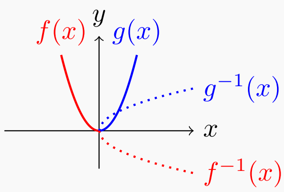
1. Pour que la fonction carrée soit continue et strictement monotone, il faut l'étudier sur seulement une partie de son domaine de définition : soit $]-\infty; 0]$, soit $[0; +\infty[$. Ainsi, on définit deux fonctions continues et strictement monotones.

   Soit $f(x) = x^2$ la fonction définie sur $]-\infty; 0]$. Son ensemble images est donc $[0; +\infty[$.
   Soit $g(x) = x^2$ la fonction définie sur $[0; +\infty[$. Son ensemble images est donc $[0; +\infty[$.
   On remarque que les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ ont le même ensemble image.



2. D'après le théorème précédent, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ admettent des fonctions réciproques :
   $f^{-1}(x) : [0; +\infty[\to]-\infty; 0]$ et $g^{-1}(x) : [0; +\infty[\to [0; +\infty[$.

3. Soient deux réels x et y tels que $y > 0$. Alors $y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$. Donc y admet (au plus) deux antécédents, l'un dans $[0; +\infty[$ et l'autre dans $]-\infty; 0]$. On en déduit que $f^{-1}(x) = -\sqrt{y}$ et $g^{-1}(x) = \sqrt{y}$ où $f^{-1}(x)$ et $f(x)$ ont le même sens de variation. Idem pour $g^{-1}(x)$ et $g(x)$.



4.2 Application : la fonction logarithme népérien est la réciproque de la fonction exponentielle de base e.

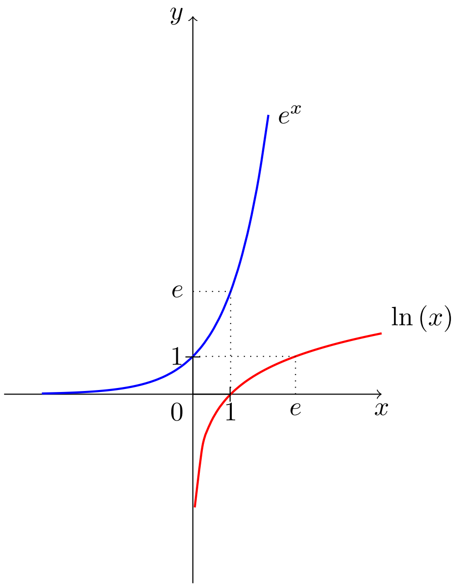
La fonction $f(x) = e^x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque que l'on appelle fonction logarithme népérien, notée [2] $\ln(x)$, définie sur $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

Si $f(x) = e^x$, $\mathbb{R} \to]0; +\infty[$ alors $f^{-1}(x) = \ln(x)$, $]0; +\infty[\to \mathbb{R}$

Si $g(x) = \ln(x)$, $]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ alors $g^{-1}(x) = e^x$, $\mathbb{R} \to]0; +\infty[$

2. Il y a deux écritures possibles : $\ln(x)$ ou $\ln x$. Cependant, nous préférons la première pour des raisons pédagogiques. Avec des parenthèses, on évite la confusion suivante : $\ln(x+2) \neq \ln x + 2$



Réciprocité des fonctions $\ln(x)$ et e^x.

La réciprocité des deux fonctions implique que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $e^{\ln(x)} = x$;
3. $\ln(1) = 0 \Leftrightarrow e^0 = 1$;
4. $\ln(e) = 1 \Leftrightarrow e^1 = e$.

Attention les conditions pour passer d'une exponentielle à un log népérien et pour passer d'un log népérien à une exponentielle sont différentes car les domaines de définition des deux fonctions sont différents.

5 Fonction logarithme népérien notée $\ln(x)$

5.1 Domaine de définition et continuité

Le **domaine de définition** de la fonction $\ln(x)$ est $]0; +\infty[$ et l'ensemble des images est $\mathbb{R}$.
Cette fonction est **continue** et **dérivable** sur son domaine de définition.

5.2 Sens de variation et extremum

La **dérivée première**[3] de $f(x) = \ln(x)$ est $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Comme le domaine de définition est $\mathbb{R}_*^+$, on en déduit que $\ln'(x) > 0$ donc la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}_*^+$. Par conséquent...

1. ...la fonction $x \mapsto \ln(x)$ conserve l'ordre : $x < y \Leftrightarrow \ln(x) < \ln(y)$, $x > y \Leftrightarrow \ln(x) > \ln(y)$ et $x = y \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(y)$.
2. ...la fonction $x \mapsto \ln(x)$ n'admet pas d'extremum.

5.3 Concavité/convexité

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est **concave** sur l'ensemble de son domaine de définition. En effet, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ donc $\ln''(x) = \frac{-1}{x^2}$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_*^+ \Rightarrow \frac{-1}{x^2} < 0$.

5.4 Limites et asymptotes

Les **limites aux bornes du domaine** sont $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale.

3. Il y a deux écritures possibles : $\ln'(x)$ ou $(\ln(x))'$

5.5 Limites indéterminées avec exponentielle, log népérien et/ou puissance

Comment lever les **formes indéterminées entre une fonction logarithmique, une fonction exponentielle et une fonction puissance ?**

Théorèmes des croissances comparées

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (x \times \ln(x)) = 0$ avec $n, m \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^m}{x^n} = 0$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^n \times (\ln(x))^m = 0$ avec $n, m \in \mathbb{N}$

Les résultats ci-dessus sont considérés comme acquis. On peut dire, au voisinage de 0 et en l'infini, que l'exponentielle "l'emporte" sur la fonction puissance entière naturelle qui "l'emporte" sur la fonction logarithme népérien.

Exemple 108 : La limite $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{x \times e^x}{x^{10000}} \right)$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pour lever l'indétermination, on utilise un des théorèmes des croissances comparées qui est un résultat acquis : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{x \times e^x}{x^{10000}} \right) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^{9999}} \right) = +\infty$.

Exemple 109 : La limite $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x^{10000}}{e^x}$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pour lever l'indétermination, on utilise un des théorèmes des croissances comparées $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x^{10000}}{e^x} = 0$.

5.6 Résolution de l'équation $\ln(x) = 0$.

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur son domaine de définition. Puisqu'elle est monotone croissante et sachant que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \ln(x) = -\infty$, l'équation $\ln(x) = 0$ admet une seule solution (en référence au TVI) : $\ln(x) = 0$. La fonction exponentielle de base e étant la réciproque de la fonction log népérien, on cherche donc $e^{\ln(x)} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$. On en déduit que le graphe de la fonction ln coupe l'axe des abscisses en $x = 1$. Par conséquent, $\forall x \in]0; 1[$, $\ln(x) < 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $\ln(x) > 0$.

5.7 Propriétés de la fonction $\ln(x)$

$\forall x,\ y \in \mathbb{R}_*^+$

1. $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$;
2. $\ln \left(\dfrac{x}{y} \right) = \ln(x) - \ln(y)$ donc $\ln \left(\dfrac{1}{x} \right) = \ln(1) - \ln(x) = -\ln(x)$;
3. $\ln(x^n) = n \times \ln(x)$ donc $\ln(\sqrt{x}) = \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2} \ln(x)$.

Les propriétés de la fonction $\ln(x)$ sont très utiles pour l'analyse économique car elles permettent de transformer des relations non linéaires en relations linéaires.

Exemple 110 : La masse salariale (M) est le produit du salaire moyen (S) par le nombre de salariés (N) : $M = S \times N$. Comme toutes ces variables sont supposées strictement positives, on peut transformer cette relation en utilisant la fonction ln.
$M = S \times N \Rightarrow \ln(M) = \ln(S \times N) \Rightarrow \ln(M) = \ln(S) + \ln(N)$. En posant $m = \ln(M)$, $s = \ln(S)$ et $n = \ln(N)$, la relation devient : $m = s + n$.

Exemple 111 : Le salaire réel (R) rapporte le salaire nominal (W) à l'indice des prix (P) : $R = \dfrac{W}{P}$ d'où $\ln(R) = \ln\left(\dfrac{W}{P}\right) \Rightarrow \ln(R) = \ln(W) - \ln(P)$. En posant, $\ln(R) = r$, $\ln(W) = w$ et $\ln(P) = p$ alors $r = w - p$.

6 Fonction composée avec une fonction log népérien : $f(x) = \ln(u(x))$

La fonction f définie par $x \mapsto \ln(u(x))$ est une fonction composée où $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec $g(x) = \ln(x)$ et $h(x) = u(x)$.

1. Cette fonction est définie à la condition que $u(x) > 0$.
2. On rappelle que la dérivée d'une fonction composée est $(g \circ h)'(x) = g'[h(x)](x) \times h'(x)$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{h(x)} \times h'(x) = \dfrac{h'(x)}{h(x)}$. Avec la notation précédente : $(\ln(u(x)))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
3. Le calcul des limites fait souvent appel aux **théorèmes des croissances comparées**.

Exemple 112 : Calculons les limites suivantes : $f(x) = \dfrac{\ln(2x^2)}{x^4}$ pour $x \to +\infty$ et $x \to 0^+$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$. Or, selon un des théorèmes des croissances comparées on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$.

Exemple 113 : Calculons les limites de la fonction $g(x) = x^4 \times \ln(2x^2)$ pour $x \to +\infty$ et $x \to 0$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ est une forme indéterminée du type $0 \times -\infty$. Or, selon un des théorèmes des croissances comparées on conclut que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

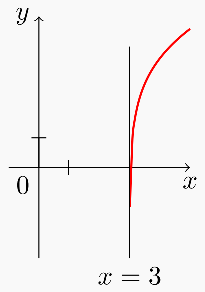
Exemple 114 : Soit $f(x) = \ln(x^3 - 27)$.

a) La fonction $f(x)$ est définie si $x^3 - 27 > 0 \Rightarrow x^3 > 27 \Rightarrow x > 27^{\frac{1}{3}}$ donc $x > 3$ (car $3^3 = 27$) : $D_f =]3; +\infty[$.

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{x^3 - 27}$ d'où $f'(x) > 0$ sur le domaine de définition. La fonction est strictement croissante donc elle n'admet pas d'extremum.
$f''(x) = \dfrac{6x(x^3 - 27) - 3x^2(3x^2)}{(x^3 - 27)^2} = \dfrac{-3x^4 - 162x}{(x^3 - 27)^2}$. On cherche x tel que $f''(x) = 0$.

c) Soit $-3x^4 - 162x = 0 \Rightarrow -3x(x^3 + 54) = 0$. On trouve $x = 0$ et $x = (-54)^{\frac{1}{3}}$. Or, ces valeurs n'appartiennent pas au domaine de définition donc il n'existe pas de point d'inflexion. De plus, $f''(x) > 0$ quand $x < (-54)^{\frac{1}{3}}$ donc, sur le domaine de définition, $f''(x) < 0$. La fonction est concave.

d) Les limites aux bornes du domaine sont $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$. On en déduit que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale.



7 Résolution d'équation avec $\exp(x)$ et $\ln(x)$.

Les propriétés de la fonction exponentielle et de la fonction log népérien, ainsi que leur réciprocité, permettent de résoudre des équations.

Pour résoudre les équations avec des exponentielles et log népérien, on applique toujours appliquer les règles de la balance (cf. S1).

Exemple 115 : $7e^{3x} = 630 \Rightarrow e^{3x} = 90$.
Première possibilité : $\Rightarrow (e^x)^3 = 90 \Rightarrow e^x = 90^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \ln(e^x) = \ln(90^{\frac{1}{3}}) \Rightarrow x = \ln(90^{\frac{1}{3}}) = \dfrac{1}{3}\ln(90)$
Seconde possibilité : $\Rightarrow \ln(e^{3x}) = \ln(90) \Rightarrow 3x = \ln(90) \Rightarrow x = \dfrac{\ln(90)}{3}$.

Exemple 116 : $\ln(x-e)^2 = 4 \Rightarrow 2\ln(x-e) = 4 \Rightarrow \ln(x-e) = 2 \Rightarrow e^{(\ln(x-e))} = e^2 \Rightarrow x - e = e^2 \Rightarrow x = e^2 + e$

Exemple 117 : $\ln(6-x) - \ln(x+1) = \ln(1)$. La solution devra respectée les conditions suivantes : $6 - x > 0 \Rightarrow x < 6$ et $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$ donc $x \in]-1; 6[$.
On sait que $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ donc $\ln(6-x) - \ln(x+1) = \ln\left(\dfrac{6-x}{x+1}\right)$. L'équation devient $\ln\left(\dfrac{6-x}{x+1}\right) = \ln(1)$.
De plus, on sait que $x > 0$alors $x = y \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(y)$ d'où $\dfrac{6-x}{x+1} = 1 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$. Cette solution appartient bien à l'ensemble $]-1; 6[$.

Exemple 118 : $\ln(2x+1) + \ln(x) = 0$. La solution devra respecter les conditions suivantes : $x > 0$ et $2x + 1 > 0$ donc $x \in]0; +\infty[$.
On sait que $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ donc $\ln(2x+1) + \ln(x) = \ln(x(2x+1))$ et $0 = \ln(1)$.
L'équation devient $\ln(x(2x+1)) = \ln(1)$ d'où $x(2x+1) = 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x^{'} = -1$ et $x^{''} = \dfrac{1}{2}$. Donc $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.
On peut vérifier la solution : $\ln(2 \times \frac{1}{2} + 1) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln(2) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln(2) - \ln(2) = 0$.

Exemple 119 : Nombre d'années pour doubler le PIB français.
Soit g, exprimé en %, le taux de croissance de l'économie et Y_t le PIB à la date t. Alors, on peut écrire : $Y_{t+1} = (1+g) \times Y_t$. Connaissant Y_0, la relation devient : $Y_{t+1} = (1+g)^t \times Y_0$ qui illustre une croissance exponentielle de base $1+g$.

PIB euros constants	
1949	270,2 milliards d'euros
2017	2246,7 milliards d'euros
Comptes nationaux - Base 2014, Insee	

(a) Quel est le taux de croissance annuel moyen (TCAM) sur la période ?
$g = \left(\dfrac{2246,7}{270,2}\right)^{\frac{1}{68}} - 1 = 0,032$, soit une croissance annuelle moyenne sur la période de $3,2\%$.
Donc, on peut écrire : $Y_{2017} = 1,032^t \times Y_{1949}$ avec $t = 68$. Cette manière de faire permet de lisser la croissance entre 1949 et 2016.

(b) Si le taux de croissance annuel moyen se maintient à $3,2\%$ dans combien d'années le PIB aura doublé à partir de 2017 ?
On cherche n tel que $Y_{2017+n} = 2 \times Y_{2017}$. On sait que (on conjecture que) $Y_{2017+n} = (1,032)^n \times Y_{2017}$ donc $(1,032)^n \times Y_{2017} = 2 \times Y_{2017} \Rightarrow (1,032)^n = 2 \Rightarrow \ln\left((1,032)^n\right) = \ln 2 \Rightarrow n \ln(1,032) = \ln(2) \Rightarrow n = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1,032)} \simeq 22$ donc au cours de l'année $2017+22 = 2039$ le PIB doublera si le TCAM se maintient à $3,2\%$!

7.1 Élasticité et log

Nous avons vu que l'élasticité-prix, en x, se calcule de la manière suivante : $e_p = x \times \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Or, $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = [\ln(f(x))]'$ donc $e_p = x \times [\ln(f(x))]'$

7.2 Log et taux de croissance instantané

Le PIB est une variable du temps : $Y(t)$. Si l'on suppose que le temps s'écoule continument (non discret) alors la variation du PIB sera égale à $\Delta Y_{t+1/t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left(\dfrac{Y(t+\Delta t) - Y(t)}{\Delta t}\right) = (Y(t))'$. Donc, le taux de croissance instantané (taux de variation instantané) est égal à $g_y = \dfrac{Y'(t)}{Y(t)} = (\ln(Y(t))'$