TD1

Produits dérivés et arbitrage

Exercice 1 (Arbitrage et prix d'un contrat forward)

a. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, montrer que si deux portefeuilles X et Y vérifient en T : $X_T \leq Y_T$ alors

$$X_t \leq Y_t, \quad t \leq T.$$

b. Rappeler la définition d'un contrat forward ou futur de maturité T sur un sous-jacent de prix S_t à l'instant t.

c. Montrer que son prix à l'instant t est donné par

$$F(t,T) = \frac{S_t}{B(t,T)},$$

où $B(t,T)$ est le prix à l'instant t d'un zéro-coupon de maturité T.

Exercice 2 (Arbitrage sur contrat forward) Sur le marché, on observe un contrat forward pour l'achat d'une action Apple avec date de livraison dans un an. Le prix de livraison aujourd'hui est de 3 euros. Le prix de l'action Apple est de 2 euros. le taux d'intérêt à un an est égal $r = 10\%$.

a. Y a-t-il un arbitrage ?
b. Si oui, proposez une stratégie d'arbitrage

Sur le même marché, on trouve également un contrat forward sur action Microsoft avec date de livraison dans six mois. Le prix de livraison aujourd'hui est égal à 2 euros et a même valeur que le prix de l'action Microsoft. Le taux d'intérêt à six mois est égal à $r = 5\%$. Un gestionnaire de portefeuille pense qu'il existe une opportunité d'arbitrage.

a. Le gestionnaire de portefeuille a-t-il raison ?

b. Si oui, quel devrait être le prix d'un tel contrat ? Proposez lui un portefeuille d'arbitrage.

Exercice 3 (Bornes de non-arbitrage sur le prix du Call)

a. A l'aide d'un raisonnement d'arbitrage montrer que le prix C_t du Call à la date $t \leq T$ vérifie l'inégalité
$$C_t \leq S_t.$$

b. A l'aide de l'exercice précédent, montrer la seconde inégalité pour tout $t \leq T$:
$$(S_t - KB(t,T))_+ \leq C_t.$$

Exercice 4 (Relation de parité Call-Put)

Soient C_t, P_t les prix à la date t d'un Call et d'un Put de même prix d'exercice K et de même maturité T. Montrer à l'aide d'un raisonnement d'arbitrage la relation de parité Call-Put suivante
$$C_t - P_t = S_t - KB(t,T),$$
où l'on rappelle que $B(t,T)$ désigne le prix à l'instant t d'une obligation zéro coupon de maturité T.

Exercice 5 (Arbitrage Call Put)

Une option Call et une option Put de maturité $T = 1$ an et de prix d'exercice $K = 35$ sont évaluées au prix de 8 et 12 euros respectivement. Le prix aujourd'hui du sous jacent est de 31 euros. Le taux d'intérêt r à horizon 1 an est de 5%.

a. Avec les cotations ci-dessus, est-il possible de construire une stratégie d'arbitrage ?

Exercice 6 (Long Straddle) Un employé d'un fond d'investissement décide d'acheter une option Call et une option Put sur le même sous-jacent avec les mêmes caractéristiques T, K. Chaque option coûte 10 euros.

a. Le patron du fond d'investissement souhaite connaître le payoff réalisé par la combinaison de ces deux options. Tracez le payoff ainsi que le gain réalisé en fonction du prix du sous-jacent.
b. Quelle est l'anticipation de l'employé quant aux variations du prix du sous-jacent ?

Exercice 7 (Butterfly) Un investisseur décide d'acheter un Call de strike K_1, vendre deux Call de strike $(K_1 + K_2)/2$ et d'acheter un Call de strike K_2. Les trois options Call ont même maturité T.

a. Montrer que le payoff résultant d'une telle stratégie est toujours positif.

b. Que peut-on en déduire la fonction $K \mapsto C_t(K)$ où $C_t(K)$ représente le prix d'une option Call à la date t de maturité T et de prix d'exercice K ?

Exercice 8 (Bornes de non-arbitrage sur le prix du Put) Dans cet exercice, on souhaite étendre les bornes de non-arbitrage de l'exercice précédent au cas de l'option Put

a. A l'aide d'un raisonnement d'arbitrage montrer que le prix P_t du Put à la date $t \leq T$ vérifie l'inégalité

$$P_t \leq KB(t,T).$$

b. A l'aide de l'exercice précédent, montrer la seconde inégalité :

$$(KB(t,T) - S_t)_+ \leq P_t, \text{ pour tout } t \leq T.$$

c. On suppose que $S_0 = 37$, $K = 40$, $r = 5\%$ et $T = 0,5$ (6 mois). On suppose également que $B(t,T) = e^{-r(T-t)}$. On observe sur le marché un Put sur le sous-jacent avec les caractéristiques K, T. Son prix à l'instant $t = 0$ est 1 euro. Est-ce qu'il existe un arbitrage ? Si oui, donnez un exemple.