TD2

AOA et modèle binomial à une période

Exercice 1 (Conséquence de l'AOA dans un marché binomial à une période)

On considère un marché financier constitué d'un actif sans risque dont la valeur à l'instant t est donnée par $(1+r)^t$ et d'un actif risqué dont la valeur à l'instant t est donnée par S_t. On se place dans le cadre d'un modèle binomial à une période avec les notations introduites dans le cours.

a. Rappeler la définition d'une stratégie d'arbitrage.

b. Comment s'écrit l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage ?

c. A l'aide du principe d'évaluation risque-neutre, montrer que le prix de livraison à l'instant 0 d'un contrat forward de maturité $T = 1$ portant sur l'actif risqué est donné par
$$F(0,1) = \frac{S_0}{B(0,1)},$$
où $B(0,1)$ est le prix à l'instant 0 d'un zéro-coupon de maturité $T = 1$ dont on rappellera l'expression.

d. Soit C_0 (resp. P_0) le prix à la date 0 d'un contrat Call (resp. Put) de même maturité $T = 1$ et de même prix d'exercice K portant sur le même sous-jacent. Redémontrer la relation de parité Call-Put
$$C_0 - P_0 = S_0 - \frac{K}{1+r}.$$

Exercice 2 (Bornes de non-arbitrage sur les prix du Call et du Put) On se place dans tout l'exercice dans le cadre du modèle binomial avec un actif sans risque et actif risqué.

a. A l'aide du principe d'évaluation risque-neutre, redémontrer les bornes de non-arbitrage sur le prix du Call
$$(S_0 - KB(0,1))_+ \leq C_0 \leq S_0.$$

b. Faire de même pour les bornes de non-arbitrage sur le prix du Put
$$(KB(0,1) - S_0)_+ \leq P_0 \leq KB(0,1)$$

Exercice 3 (Retour sur l'option Butterfly)

On se place dans le cadre du modèle binomial étudié dans le cours. Une option Butterfly consiste en l'achat d'un Call de strike K_1, la vente de deux Call de strike $(K_1 + K_2)/2$ et l'achat d'un Call de strike K_2. Les trois options Call ont même maturité T et portent évidemment sur le même sous-jacent.

a. Ecrire le payoff d'une telle option.
b. Donner l'expression du prix à la date 0.
c. En déduire que le prix d'une option Call est une fonction convexe du prix d'exercice, c'est-à-dire que $K \mapsto C_0(K)$ est une fonction convexe.

Exercice 4 (Option Straddle) On se place dans le cadre du modèle binomial étudié dans le cours. Une option Straddle consiste en l'achat d'une option Call et une option Put sur le même sous-jacent avec les mêmes caractéristiques $T = 1$, K.

a. Ecrire et tracer le payoff d'une telle option.
b. Les paramètres du modèles sont $S_0 = 100$, $h = 0.2$, $b = -0.1$, $r = 5\%$ et $K = 110$. Quel est le prix à la date $t = 0$ de l'option ?
c. Quelle stratégie de portefeuille faut-il mettre en oeuvre pour couvrir parfaitement cette option ?

Exercice 5 (Marché binomial à une période) On considère un marché binomial à deux dates avec un actif risqué et un actif sans risque dont le prix à la date $t = 0$ vaut 100. Le taux d'intérêt r est de 5%. L'actif risqué peut monter de 20% ou descendre de 10%.

a. Décrire $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
b. L'hypothèse d'AOA est elle vérifiée ? Si oui, calculez la probabilité risque neutre.
c. Calculer le prix d'un Call et d'un Put de strike 100.
d. Vérifier dans ce cas précis la relation de parité Call-Put.

Exercice 6 (Fonds de pension et arbitrage)

Un fonds de pension possède des obligations d'une entreprise A en difficulté financière. Les obligations sont cotées sur le marché au prix de 1000 euros. On considère que l'entreprise fera faillite au bout d'un an avec probabilité p = 5%. Si l'entreprise ne fait pas faillite, le montant de remboursement pour chaque obligation est de 1100 euros. En cas de faillite, le remboursement est seulement 400 euros. Pour se protéger contre la faillite de l'entreprise A, le fonds s'adresse à une banque en lui demandant de structurer un produit qui paie 1000 euros en cas de faillite de A et zéro sinon. Le taux sans risque du marché est de 5%.

a. Quel sera le prix que la banque proposera au fonds d'investissement ?
b. La banque s'apercoit qu'un compétiteur propose le même produit pour un prix de 50 euros. Décrivez une stratégie d'arbitrage possible.

Exercice 7

Considérons ici que le vendeur de l'option effectue une transaction sur l'action en achetant ou vendant une quantité δ. Il crée donc la stratégie suivante $(\alpha, \delta, -1)$ où α est la quanté de cash et δ la quantité d'actifs risqué en portefeuille.

a. Déterminer la quantité de cash nécessaire à détenir afin que le portefeuille ait une valeur nulle à $t = 0$.
b. Démontrer que sous l'hypothèse d'AOA pour couvrir un Call européen, il faut acheter des actions. Pour cela, on déterminera la quantité δ d'actions à acheter pour se couvrir du Call.
c. En déduire le prix π_0 du Call européen en $t = 0$.
d. Définir une probabilité $\mathbb{Q}$ et un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ tels que le prix se réecrit
$$\pi_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\frac{(S_1 - K)_+}{1+r}\Big].$$

Exercice 8 (Sur-réplication et probabilité risque-neutre)

On se place dans un modèle binomial à une période. Les paramètres du modèle sont les constantes S_0, h, d et r telles que S_0, $-1 < b < h$. On suppose dans tout l'exercice la relation $b < r < h$ satisfaite.

a. Rappeler l'expression de la probabilité risque-neutre.
b. Soit $(\alpha, \delta) \in \mathbb{R}^2$ une stratégie de portefeuille où α (resp. δ) représente la quantité d'argent (resp. d'actif risqué) à la date 0 dans le portefeuille. On note $V_t^{(\alpha,\beta)}$ la valeur à la date t du portefeuille. Montrer que la valeur $V_0^{(\alpha,\beta)}$ du portefeuille est donnée par l'espérance de $V_1^{(\alpha,\beta)}$ actualisée.
c. En déduire que le prix de non-arbitrage en 0 de tout actif contingent réplicable est égal à l'espérance sous la probabilité risque-neutre du payoff actualisé. Cette propriété s'appelle le principe d'évaluation risque-neutre. Donner explicitement le prix d'un actif contingent réplicable dans le modèle binomial à une période.