# TD3

Quelques exercices sur l'espérance conditionnelle et les martingales

Soit $\Omega$ l'espace de tous les états possibles appelé espace des états. On supposera dans toute la suite que $\Omega$ est **fini**. On munit l'espace $\Omega$ de la plus grande tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. On se donne une probabilité $\mathbb{P}$ définie sur cet espace telle que $\mathbb{P}(\omega) > 0$, $\forall w \in \Omega$. Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilité.

Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Il existe une unique variable aléatoire $\mathcal{B}$-mesurable noté $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ vérifiant :

$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] = \inf\left\{\mathbb{E}[(X-U)^2], U\ \mathcal{B}-\text{mesurable}\right\}$$

ou $\forall Z$ $\mathcal{B}$-mesurable

$$\mathbb{E}[ZX] = \mathbb{E}[ZY]$$

ou $\forall B \in \mathcal{B}$

$$\mathbb{E}[1_B X] = \mathbb{E}[1_B Y].$$

Voici quelques propriétés à connaître concernant l'espéranceconditionnelle :

a. (Linéarité) $\mathbb{E}[aX + bX'|\mathcal{B}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] + b\mathbb{E}[X'|\mathcal{B}]$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall X, X'$ variables aléatoires rélles.

b. Soit $Z$ une variable aléatoire rélle $\mathcal{B}$-mesurable, alors $\mathbb{E}[Z|\mathcal{B}] = Z$.

c. Soit $X'$ une variable aléatoire rélle indépendante de $\mathcal{B}$ alors $\mathbb{E}[X'|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[X']$.

d. Soit $Z$ une variable aléatoire rélle $\mathcal{B}$-mesurable, alors $\mathbb{E}[ZX|\mathcal{B}] = Z\mathcal{E}[X|\mathcal{B}]$.

e. $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]]$.

f. (Espérances conditionnelles emboîtées) Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$ telles que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ alors $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}_2]|\mathcal{B}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}_1]|\mathcal{B}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{B}_1]$.

g. (Inégalité de Jensen) Soit $\phi$ une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors

$$\phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{B}].$$

Martingales, sous-martingales et sur-martingales

Soit $(\mathcal{F}_n)$ une suite de tribus telle que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, $\forall n$. Une telle suite de tribus est appelée filtration.

Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires réelles. La suite $(X_n)$ est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites

— $X_n$ est $\mathcal{F}_n$ mesurable pour tout $n$.
— $\forall n, \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$.
— $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ pour tout $n$.

La suite $(X_n)$ est une sous-martingale (resp. sur-martingale) si et seulement si
— $X_n$ est $\mathcal{F}_n$ mesurable pour tout $n$.
— $\forall n, \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$.
— $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$ pour tout $n$ (resp. $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$ pour tout $n$).

**Exercice 1**

Vérifier les assertions suivantes :

a. $(X_n)$ est une surmartingale si et seulement si $(-X_n)$ est une sous-martingale.
b. $(X_n)$ est une martingale si et seulement si $(X_n)$ est à la fois une sur-martingale et une sous-martingale.
c. Si $(X_n)$ est une sous-martingale (resp. surmartingale), alors $(\mathbb{E}[X_n])$ est une suite croissante (resp. décroissante).
d. Si $(X_n)$ est une martingale, alors $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_p] = X_p$, $\forall n \geq p$.
e. Soit $Z$ une variable aléatoire rélle. La suite $(X_n)$ définie par $X_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n]$ est une martingale.

**Exercice 2**

a. Soit $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ une martingale et $\varphi$ une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(\varphi(X_n))_{0\leq n\leq N}$ est une sous-martingale.
b. Soit $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ une sous-martingale et $\varphi$ une fonction convexe croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(\varphi(X_n))_{0\leq n\leq N}$ est une sous-martingale.

**Exercice 3**

Soit $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ une martingale et soit $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ une suite prévisible. On pose

$$\Delta M_n = M_n - M_{n-1}.$$

Montrer que la suite $(Y_n)_{0\leq n\leq N}$ définie par $Y_0 = H_0 M_0$ et pour $n \geq 1$ par

$$Y_n = H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \cdots + H_n \Delta M_n$$

est une martingale.

**Exercice 4**

Soit $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ une suite adapté de variables aléatoires réelles. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
— $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale.

— Pour toute suite $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ prévisible,

$$\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta X_n] = 0$$

**Exercice 5**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs respectivement dans $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. On suppose que $X$ est indépendante de $\mathcal{G}$ et que $Y$ est $\mathcal{G}$-mesurable. Montrer que pour toute fonction mesurable $h : E \times F \to \mathbb{R}_+$, on a

$$\mathbb{E}[h(X,Y)|\mathcal{G}] = \phi(Y),$$

avec

$$\phi(y) := \int_E h(x,y)\, \mathbb{P}_X(dx), \quad y \in F,$$

où $P_X$ désigne la mesure image par $\mathbb{P}$ de la v.a. $X$. Notons que le théorème de Fubini garantit que l'application $y \mapsto \int_E h(x,y)\, \mathbb{P}_X(dx)$ est mesurable.

**Exercice 6**

On se donne deux réels $a, b > 0$ et $(X, Y)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ dont la loi est caractérisée par

$$\mathbb{P}(X = n, Y \leq t) = b \int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} \exp(-a(a+b)y)\, dy.$$

a. Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $h(Y) \in L^1(\mathbb{P})$. Déterminer $\mathbb{E}[h(Y)|X = n]$ pour tout entier $n$.

b. Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X+1}\right]$.