TD5

Modèle binomial multi-périodes

Exercice 1. On considère le marché financier à trois dates $t = 0, 1, 2$, composé d'un actif sans risque de taux d'intérêt r et d'un actif risqué de prix S. A chaque date $t = 1$ ou $t = 2$, le prix peut être multiplié par $1 + h$ ou $1 + b$. On suppose $-1 < b < r < h$.

a. Représentez l'arbre d'évolution de l'actif risqué.
b. Quel est l'espace mesurable filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_{t=0,1,2}))$ associé à ce modèle ? On le suppose mesuré par une probabilité $\mathbb{P}$ chargeant tous les atomes.
c. Soit ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_2$-mesurable. On considère un produit financier de payoff ξ. Déterminer le prix et la stratégie de réplication de ce produit.
d. Déterminez la probabilité risque neutre et retrouver le prix du produit financier.
e. On considère le produit financier de maturité $t = 1$ et de payoff $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\xi/(1 + r)|\mathcal{F}_1]$. Montrer que son prix est égal au prix du produit de payoff ξ délivré en $t = 2$.

Exercice 2.

On se place dans le cadre d'un modèle binomial à trois dates : $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$ avec $r = 0.05$, $h = 0.1$, $b = -0.05$ et $S_0 = 100$.

a. Représentez l'arbre d'évolution de l'actif risqué.
b. Déterminez la probabilité risque neutre.
c. Quel est le prix et la stratégie de couverture pour un call de strike $K = 105$ et d'échéance $T = 2$?
d. Déterminez le prix et la stratégie de couverture pour une option lookback de pay-off final :
$$(S_2^* - 100)^+ \quad \text{avec} \quad S_t^* = \sup_{u \le t} S_u \ .$$

Exercice 3.

On se place dans le cadre d'un modèle binomial à trois dates : $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$ avec $r = 0.06$, $h = 0.1$, $b = -0.1$ et $S_0 = 40$.

a. On considère une option call *à barrière* du type *Up-and-In* de strike K et de pay-off final :
$$(S_2 - K)^+ \mathbf{1}_{\{S_t^* \ge H\}} \quad \text{avec} \quad S_t^* = \sup_{u \le t} S_u \ .$$
Déterminez le prix d'ne option call Up-and-In de strike $K = 44$ et de barrière $H = 42$ à l'instant $t = 0$.

b. Une option call (resp. put) *digitale* paye 1 euro si le prix du sous-jacent à l'échéance est au dessus (resp. au dessous) d'une barrière $H > 0$ et zéro sinon, i.e. le pay-off final d'une option call digitale d'échéance $t = 2$ est :

$$\mathbf{1}_{\{S_2 \geq H\}}$$

et l'inverse pour une option put digitale. Calculer le prix d'une option call digitale de barrière $H = 42$ et le prix d'une option put digitale de même barrière. Existe-il une relation entre ces deux prix similaire à la relation de parité call-put ? Expliciter cette relation.