Partiel de mathématique financière

20 avril 2023

Durée : 1h30

Les notes de cours ainsi que les téléphones portables sont interdits pendant toute la durée de l'épreuve.
La calculatrice est autorisée. Le barème est indicatif.

Exercice 1 (Questions de cours. (6pts))**.**

1. (1pt) Donner la définition d'une stratégie d'arbitrage dans un **modèle binomial à** 1 **période**.
2. (1pt) En utilisant les notations du cours, sous quelle condition sur les paramètres r, b et h a t-on absence d'opportunité d'arbitrage ?
3. (1pt) Construisez un arbitrage dans le cas où $r < b$.
4. Sur le marché, on observe un contrat forward pour l'achat d'une action Air liquide avec date de livraison dans un an. Le prix de livraison aujourd'hui est de 2.7 euros. Le prix de l'action Air liquide est de 2 euros. le taux d'intérêt à un an est égal $r = 10\%$.
   (a) (1.5pts) Y a-t-il un arbitrage ?

   (b) (1.5pts) Si oui, proposez une stratégie d'arbitrage

Exercice 2 (Modèle binomial à une période. (14pts))**.** Dans tout cet exercice, on se place dans un modèle binomial à une période avec deux dates $t = 0, 1$. Le taux sans risque est de 6% et on utilise les mêmes notations que dans le cours. Le prix initial de l'actif risqué est $S_0 = 100$. On prend $h = 0.1$ et $b = -0.02$. L' espace de probabilité fini non redondant $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est muni de la filtration $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,1\}}$ vérifiant $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$.

1. (a) (0.5pt) Représenter l'arbre d'évolution à deux dates du prix de l'actif risqué.
   (b) (0.5pt) L'absence d'opportunité d'arbitrage est-elle vérifiée dans ce modèle ?
   (c) (0.5pt) Que vaut $\mathbb{P}^*(w_h) = \mathbb{P}^*(S_1 = S_0(1 + h))$ où $\mathbb{P}^*$ est l'unique probabilité risque-neutre de ce modèle ?
   (d) (1pt) Montrer que le processus de prix de l'actif risqué actualisé $\left\{\tilde{S}_t = S_t/(1 + r)^t, t = 0, 1\right\}$ est une $(\underline{\mathcal{F}}, \mathbb{P}^*)$ martingale.
2. On s'intéresse au prix d'un **Put européen** de maturité $T = 1$ et de prix d'exercice $K = 100$ euros.
   (a) (1pt) Calculer le prix à la date 0 de ce Put européen.
   (b) (1pt) Rappeler la relation de parité Call-Put **à la date** 0 dans ce modèle.
   (c) (1pt) En déduire le prix **à la date** 0 du **Call européen** *à la monnaie* de maturité $T = 1$.
3. On considère maintenant une option **digitale** de payoff $h_T = \mathbf{1}_{\{S_T \geq K\}}$, de maturité $T = 1$ et de prix d'exercice $K = 100$.
   (a) (1pt) Calculer le **prix à la date 0** d'une telle option. On le notera $\widetilde{C}_0^d$.
   (b) (2pts) Quelle est la stratégie de couverture du vendeur (α_1, β_1) associée à cette option ? On calculera la quantité d'actif risqué α_1 et d'actif sans risque β_1 à détenir en portefeuille à la date 0.
   (c) (2pts) On souhaite calculer le prix $\widetilde{P}_0^d$ d'une nouvelle option digitale de payoff $\tilde{h}_T = \mathbf{1}_{\{S_T \leq K\}}$. En utilisant la relation $1 = \mathbf{1}_{\{S_T \leq K\}} + \mathbf{1}_{\{S_T \geq K\}}$ pour $K \neq S_0(1 + b), S_0(1 + h)$ et le principe d'évaluation risque neutre, donner une relation entre $\widetilde{P}_0^d$ et $\widetilde{C}_0^d$. On fera ensuite l'application numérique pour déterminer $\widetilde{P}_0^d$.

(d) (1.5pts) On note (α_2, β_2) la stratégie de réplication associé à l'option digitale de payoff $\tilde{h}_T = \mathbf{1}_{\{S_T \leq K\}}$. Par un calcul théorique (c'est-à-dire sans application numérique) utilisant la question précédente, montrer que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

4. (2pts) On note (α^c, β^c) la stratégie de couverture associée au Call européen de maturité $T = 1$ et de prix d'exercice K. On note (α^p, β^p) la stratégie de couverture associée au Put européen de même maturité et même strike. A l'aide d'un raisonnement similaire à celui de la question 3.d), montrer que l'on a

$$\alpha^c - \alpha^p = 1.$$