Chapitre 3: Quelques outils issus de la théorie des probabilités.

Noufel Frikha

7 mars 2024

Plan du chapitre 3

Rappels

Definition (Tribu)

Une tribu (ou σ-algèbre) sur un ensemble Ω est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ (parties de Ω), i.e. $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, vérifiant les trois conditions :

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. Si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ suite d'éléments de $\mathcal{F}$ alors $\cup_{n\geqslant 1} A_n \in \mathcal{F}$

∘ On dira alors que $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace probabilisable. Les éléments de $\mathcal{F}$ sont des événements.

∘ Exemple :

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ est la tribu grossière.
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ est la tribu triviale.

Definition (Mesure de probabilité)

Pour $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ est une probabilité si elle vérifie :

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$,
2. Si $(A_n)_{n \geqslant 1}$ suite d'éléments disjoints de $\mathcal{F}$ alors

$$\mathbb{P}(\cup_{n \in \geqslant 1} A_n) = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(A_n).$$

Quelques propriétés : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé alors

○ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

○ Pour toute suite finie $(A_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$ d'éléments disjoints

$$\mathbb{P}(\cup_{1 \leqslant n \leqslant N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n).$$

○ $\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

- $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Pour toute suite d'éléments disjoints $(A_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{F}$.

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

- Pour toute suite dénombrable $(A_n)_{n \geqslant 1}$,

$$\mathbb{P}(\cup_{n \geqslant 1} A_n) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(A_n).$$

- Pour toute suite croissante $(A_n)_{n \geqslant 1}$

$$\mathbb{P}(\cup_{n \geqslant 1} A_n) = \lim_{n \uparrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

- Pour toute suite décroissante $(A_n)_{n \geqslant 1}$

$$\mathbb{P}(\cap_{n \geqslant 1} A_n) = \lim_{n \uparrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Definition (Variable aléatoire)

1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire rélle si $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X^{-1}(B) = \{w : X(w) \in B\} \in \mathcal{F}$.
2. $\mathbb{P}_X$ est la loi image de $\mathbb{P}$ par X :
$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)).$$
3. Une propriété est vraie presque sûrement lorsque l'ensemble des w pour lesquelles elle est fausse est de mesure nulle.
4. $X \in \mathbb{L}^p(\mathbb{P})$, $p \geqslant 1$, si $\mathbb{E}[|X|^p] := \int_\Omega |X(w)|^p d\mathbb{P}(w) < \infty$.

○ Attention : si $\mathbb{E}[|X|^p] = 0$ alors $X = 0$ p.s.

Definition

Les variables aléatoires $(X_i)_{i\in I}$, $I \neq \emptyset$, de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans $(E_i, \mathcal{E}_i)$ sont dites indépendantes si

- $\mathbb{P}(\cap_{j\in J}\{X_j \in A_j\}) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(X_j \in A_j)$, $\forall J \subset I$, $J \neq \emptyset$, $A_j \in \mathcal{E}_j$.
- $\forall J \subset I$, $J \neq \emptyset$, $\mathbb{P}_{(X_j)_{j\in J}} = \otimes_{j\in J}\mathbb{P}_{X_j}$

Definition (Espérance conditionnelle)

Soit $Y \in L^1(\mathbb{P})$. On appelle espérance conditionnelle de Y sachant $\mathcal{G}$, toute variable aléatoire réelle intégrable Z vérifiant :

- Z est $\mathcal{G}$-mesurable
- $\forall G \in \mathcal{G}$, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_G Y] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_G Z]$

On la note $Z = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$.

Une telle variable existe et est unique à une égalité p.s. Elle est en particulier unique sur tout espace de probabilité fini tel que $\mathbb{P}(w) > 0$.

◦ Quelques propriété importantes : Pour $X, Y \in \mathbb{L}^1(\mathbb{P})$

- ◦ $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[Y]$.
- ◦ Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable, $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = Y$ p.s.
- ◦ Si Y est indépendant de $\mathcal{G}$, $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y]$ p.s.
- ◦ Soit $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[aX + Y|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$.
- ◦ Si $Y \geqslant 0$ p.s., $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \geqslant 0$ p.s.
- ◦ Si X est $\mathcal{G}$-mesurable et $\mathbb{E}[|X|\mathbb{E}[|Y||\mathcal{G}]] < \infty$ alors

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]].$$

- Soit $\mathcal{H}$ une sous-tribu de $\mathcal{G}$ alors on a

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}].$$

- Si X est $\mathcal{G}$-mesurable et $\mathbb{E}[|X||Y|] < \infty$ alors

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \quad p.s.$$

- Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$ une variable indépendante de $\mathcal{G}$ et supposons que Y soit $\mathcal{G}$-mesurable. Soit $\Phi : \mathbb{R} \times (E, \mathcal{E})$ une fonction $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{E}$-mesurable, telle que $\Phi(Y, X) \in L^1(\mathbb{P}$, alors

$$\mathbb{E}[\Phi(Y, X)|\mathcal{G}] = \varphi(Y),\ p.s. \quad \text{où} \quad \varphi(y) := \mathbb{E}[\Phi(y, X)].$$

  - Ex : $S_2 = S_1(1 + U_2)$, U_2 indép. de $\mathcal{F}_1$,
    $\mathbb{E}[h(S_2)|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[h(S_1(1 + U_2))|\mathcal{F}_1] = p(S_1),\ p(s) = \mathbb{E}[h(s(1 + U_2)].$
- Inégalité de Jensen conditionnelle : Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe vérifiant $\mathbb{E}[|\Phi(Y)|] < \infty$ alors

$$\Phi(\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]) \leqslant \mathbb{E}[\Phi(Y)|\mathcal{G}].$$

  - Ex : $x \mapsto (x - K)_+$ convexe
    $\Rightarrow (\widetilde{S}_1 - K)_+ = (\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{S}_2|\mathcal{F}_1] - K)_+ \leqslant \mathbb{E}[(\widetilde{S}_2 - K)_+|\mathcal{F}_1].$

Plan du chapitre 3

Definition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle filtration et l'on note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ toute suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$ indexé par $t \in \{0, \cdots, T\}$, c'est-à-dire

- $\mathcal{F}_t$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$
- $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$ pour tout $t \in \{0, \cdots, T-1\}$

Definition

Un processus $(X_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dit adapté si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \in \{0, \cdots, T\}$. Il est dit prévisible si X_t est $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurable pour tout $t \in \{1, \cdots, T\}$.

Typiquement, le processus de prix d'un actif risqué ou la valeur d'un portefeuille sera un processus *adapté* alors que la stratégie de portefeuille sera *prévisible*.

Definition

Un processus $(X_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ à valeurs rélles est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale (sous-martingale ou sur-martingale) si les trois conditions suivantes sont réunies :

1. X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \in \{0, \cdots, T\}$
2. $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$, pour tout $t \in \{0, \cdots, T\}$
3. $\mathbb{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = X_t$ (martingale), $\mathbb{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] \geqslant X_t$ (sous-martingale), $\mathbb{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] \leqslant X_t$ (surmartingale) pour tout $t \in \{0, \cdots, T-1\}$.

On déduit facilement de la condition 3 que pour $s, t \in \{0, \cdots, T\}$ avec $s \leqslant t$ on a $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ (martingale), $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geqslant X_s$ (sous-martingale), $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \leqslant X_s$ (surmartingale).

Definition (transformée de processus/intégrale stochastique discrète)

Soient $(X_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ un processus vectoriel, $\mathcal{F}$-adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $(\phi_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ un processus vectoriel, $\mathcal{F}$-prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On définit la transformée $(\Phi : X)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ de X par Φ par

$$(\Phi : X)_t = \Phi_0.X_0 + \sum_{s=1}^{t} \Phi_s.\Delta X_s, \quad t \in \{0, \cdots, T\}$$

avec la notation $\Delta X_s = X_s - X_{s-1}$, $s \in \{1, \cdots, T\}$.

Remarque : Il est immédiat que le processus $(\Phi : X)$ est $\mathcal{F}$-adapaté.

Theorem

Soient $a \in \mathbb{R}$, $X = (X_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ un processus $\mathcal{F}$-adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\Phi = (\Phi_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ un processus, borné, $\mathcal{F}$-prévisible, vectoriel à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On considère le processus $a + (\Phi : X) = (a + (\Phi : X)_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

- *Si X est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale alors $a + (\Phi : X)$ l'est aussi.*
- *Si X est une sur-martingale (sous-martingale) réelle et Φ est à valeurs positives alors $a + (\Phi : X)$ est une sur-martingale (sous-martingale).*

Démonstration.

On montre le premier point seulement. Le deuxième est laissé en exercice. Supposons donc que X est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale et Φ prévisible, borné.

∘ Alors, on a $\Phi_s.\Delta X_s$ est $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $s \in \{1, \cdots, t\}$. Donc $a + (\Phi : X)_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

∘ Ensuite, $|a + (\Phi : X)_t| \leqslant |a| + |(\Phi : X)_t| \leqslant |a| + \sum_{s=1}^t |\Phi_s||\Delta X_s| \leqslant |a| + \sum_{s=1}^t |\Phi_s|(|X_s| + |X_{s-1}|) \leqslant a + |\Phi|_\infty \sum_{s=1}^t |X_s| + |X_{s-1}| \in L^1(\mathbb{P})$ où on utilise $|\Phi|_\infty = \sup_{1 \leqslant s \leqslant T} |\Phi_s| < C < \infty$ avec C déterministe et X martingale donc $X_s \in L^1(\mathbb{P})$ pour tout $s \in \{0, \cdots, T\}$.

∘ Finalement, en remarquant que $a + (\Phi : X)_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, $a + (\Phi : X)_{t+1} = a + (\Phi : X)_t + \Phi_{t+1}.\Delta X_{t+1}$ et $\mathbb{E}[\Phi_{t+1}.\Delta X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \Phi_{t+1}.\mathbb{E}[\Delta X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = 0$ on obtient

$$\mathbb{E}[a + (\Phi : X)_{t+1}|\mathcal{F}_t] = a + (\Phi : X)_t + \mathbb{E}[\Phi_{t+1}.\Delta X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = a + (\Phi : X)_t.$$

Temps d'arrêt et enveloppe de Snell

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, c'est-à-dire muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ sur Ω.

Definition (Temps d'arrêt)

Une variable aléatoire $\tau : \Omega \to \{0, \cdots, T\} \cup \{+\infty\}$ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt si et seulement si :

$$\forall t \in \{0, \cdots, T\}, \quad \{\tau \leqslant t\} = \{w : \tau(w) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t.$$

On vérifie aisément que cette définition est équivalente à supposer que $\forall t \in \{0, \cdots, T\}$, $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$. En effet, on a

$$\{\tau \leqslant t\} = \cup_{0 \leqslant s \leqslant t} \{\tau = s\},$$

et

$$\{\tau = t\} = \{\tau \leqslant t\} \setminus \{\tau \leqslant t-1\} = \{\tau \leqslant t\} \cap \{\tau \leqslant t-1\}^c$$

○ L'exemple typique de temps d'arrêt est donné par les temps d'entrée de processus d-dimensionnel $\mathcal{F}$-adapté dans des boréliens de $\mathbb{R}^d$.

Theorem

Soient $(X_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ un processus $\mathcal{F}$-adapté, $t \in \{0, \cdots, T\}$ fixé et A un borélien de $\mathbb{R}^d$. Alors

$$\tau_{A,t} = \min \{s \geqslant t : X_s \in A\}$$

est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt à valeurs dans $\{t, \cdots, T\} \cup \{+\infty\}$. En outre,

$$\tau'_{A,t} = \tau_{A,t} \wedge T := \min(\tau_{A,t}, T)$$

est aussi un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt à valeurs dans $\{t, \cdots, T\}$.

Démonstration.

On vérifie que pour tout $s \in \{t, \cdots, T\}$,

$$\{\tau_{A,t} = s\} = \cap_{t \leqslant r \leqslant s-1} \{X_r \notin A\} \cap \{X_s \in A\} \in \mathcal{F}_s.$$

Aussi, si $s \in \{0, \cdots, t-1\}$, on $\{\tau_{A,t} = s\} = \emptyset \in \mathcal{F}_s$. Maintenant, $\{\tau'_{A,t} \leqslant s\} = \{\tau_{A,t} \leqslant s\}$ si $s < T$ et $\{\tau'_{A,t} \leqslant T\} = \Omega$. □

Definition (Processus arrêté)

Soit $(X_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ un processus $\mathcal{F}$-adapté et τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Le processus arrêté en τ, $X^\tau = (X_t^\tau)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est défini pour $t \in \{0, \cdots, T\}$ et $w \in \Omega$ par $X_t^\tau(w) = X_{t \wedge \tau(w)}(w)$.

Theorem

1. *Pour tout $t \in \{0, \cdots, T\}$, on a $X_t^\tau = X_0 + \sum_{s=1}^{t} \mathbf{1}_{\{s \leqslant \tau\}} \Delta X_s$. Le processus X^τ est $\mathcal{F}$-adapté. Si X est $\mathcal{F}$-prévisible alors X^τ l'est aussi.*
2. *Si X est une $\mathcal{F}$-martingale, sur-martingale ou sous-martingale alors X^τ est de même nature.*

Démonstration.

1. Sur l'ensemble $\{t \leqslant \tau\}$, on a

$$X_0 + \sum_{s=1}^{t} \mathbf{1}_{\{s \leqslant \tau\}} \Delta X_s = X_0 + \sum_{s=1}^{t} \Delta X_s = X_t = X_{t \wedge \tau} = X_t^{\tau}$$

Sur l'ensemble $\{\tau < t\} = \{\tau \leqslant t-1\}$, on a

$$X_0 + \sum_{s=1}^{t} \mathbf{1}_{\{s \leqslant \tau\}} \Delta X_s = X_0 + \sum_{s=1}^{\tau} \Delta X_s = X_{\tau} = X_{t \wedge \tau} = X_t^{\tau}.$$

On a donc bien l'égalité $X_t^{\tau} = X_0 + \sum_{s=1}^{t} \mathbf{1}_{\{s \leqslant \tau\}} \Delta X_s$.

2. Pour montrer que X^{τ} est une $\mathcal{F}$-martingale, on remarque l'égalité suivante $\{\tau \geqslant t+1\} = \{\tau \leqslant t\}^c \in \mathcal{F}_t$ ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{t+1}^{\tau} - X_t^{\tau} | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[(X_{t+1}^{\tau} - X_t^{\tau})\mathbf{1}_{\tau \geqslant t+1} + (X_{t+1}^{\tau} - X_t^{\tau})\mathbf{1}_{\tau < t+1} | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[(X_{t+1}^{\tau} - X_t^{\tau})\mathbf{1}_{\tau \geqslant t+1} | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbf{1}_{\tau \geqslant t+1}\mathbb{E}[X_{t+1} - X_t | \mathcal{F}_t] = 0\end{aligned}$$

Enveloppe de Snell

On suppose içi que l'ensemble Ω est fini et un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que $\mathbb{P}(w) > 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Dans cette partie, $H = (H_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est un processus $\mathcal{F}$-adapté et intégrable au sens où pour tout $t \in \{0, \cdots, T\}$, $H_t \in L^1(\mathbb{P})$.

Definition

On définit l'enveloppe de Snell U du processus H par

$$\begin{cases} U_T & = H_T, \\ U_t & = \max\left(H_t, \mathbb{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t]\right). \end{cases}$$

Cette relation est appelée principe de la programmation dynamique rétrograde.

L'enveloppe de Snell se caractérise facilement en terme de sur-martingale.

Caractérisation de l'enveloppe de Snell

Theorem (Caractérisation de l'enveloppe de Snell)

L'enveloppe de Snell U est la plus petite $\mathcal{F}$-sur-martingale majorant H au sens où pour toute sur-martingale V vérifiant $V_t \geqslant H_t$ pour tout $t \in \{0, \cdots, T\}$ vérifie également $V_t \geqslant U_t$ pour tout $t \in \{0, \cdots, T\}$.

Démonstration.

Par construction, on a $U_t \geqslant H_t$ pour tout $t \in \{0, \cdots, T\}$ et $U_t \geqslant \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]$ pour tout $t \in \{0, \cdots, T-1\}$ donc U est bien une $\mathcal{F}$-sur-martingale majorant H. Soit V une autre sur-martingale majorant H. En T, on a $V_T \geqslant H_T = U_T$. Supposons maintenant que $V_{t+1} \geqslant U_{t+1}$ alors

$$V_t \geqslant \mathbb{E}[V_{t+1}|\mathcal{F}_t] \geqslant \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]$$

et d'autre part, $V_t \geqslant H_t$ donc $V_t \geqslant \max(H_t, \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]) =: U_t$. □

Theorem (Temps d'arrêt optimal)

1. *Soit $t \in \{0, \cdots, T\}$. La variable aléatoire à valeurs dans $\{t, \cdots, T\}$ définie par :*

$$\nu_t = \min\{s \geqslant t : U_s = H_s\}$$

est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt vérifiant $U_{\nu_t} = H_{\nu_t}$ et le processus arrêté $U^{\nu_t} = (U_{s \wedge \nu_t})_{t \leqslant s \leqslant T}$ est une $\mathcal{F}$-martingale.

2. *Pour tout $t \in \{0, \cdots, T\}$,*

$$U_t = \mathbb{E}[H_{\nu_t}|\mathcal{F}_t] = \sup_{\nu \in \mathcal{S}_{t,T}} \mathbb{E}[H_\nu|\mathcal{F}_t]$$

où $\mathcal{S}_{t,T}$ désigne l'ensemble des $\mathcal{F}$-temps d'arrêt à valeurs dans $\{t, \cdots, T\}$. En particulier, on a

$$U_0 = \sup_{\nu \in \mathcal{S}_{0,T}} \mathbb{E}[H_\nu|\mathcal{F}_0] = \sup_{\nu \in \mathcal{S}_{0,T}} \mathbb{E}[H_\nu]$$

Rappel sur le théorème d'arrêt de Doob

Theorem (Théorème d'arrêt de Doob)

Soit $X = (X_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ *un processus* $\mathcal{F}$*-adapté, soit* $t \in \{0, \cdots, T\}$ *et* τ *un* $\mathcal{F}$*-temps d'arrêt borné.*

1. *Si* X *est une* $\mathcal{F}$*-martingale alors*

$$\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_t] = X_{t \wedge \tau} \quad p.s.$$

2. *Si* X *est une* $\mathcal{F}$*-sur-martingale (sous-martingale) alors*

$$\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_t] \leqslant X_{t \wedge \tau} \quad (\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_t] \geqslant X_{t \wedge \tau})$$

Démonstration.

1. Il s'agit du temps d'entrée du processus $\mathcal{F}$-adapté $X := U - H$ dans le Borélien $\{0\}$. Comme $U_T = H_T$, $X_T = 0$ et donc $\{\nu_t = \infty\} = \emptyset$. Donc ν_t est un temps d'arrêt à valeurs dans $\{t, \cdots, T\}$. De plus, pour $s \in \{t, \cdots, T-1\}$

$$U^{\nu_t}_{s+1} - U^{\nu_t}_s = U_{(s+1)\wedge\nu_t} - U_{s\wedge\nu_t} = (U_{s+1} - U_s)\mathbf{1}_{s<\nu_t}$$

Sur l'ensemble $\{\nu_t > s\}$, $U_s > H_s$ et donc $U_s = \mathbb{E}[U_{s+1}|\mathcal{F}_s]$. Aussi, $\{s < \nu_t\} = \{\nu_t \leqslant s\}^c \in \mathcal{F}_s$. Par conséquent, on a

$$\mathbb{E}[U^{\nu_t}_{s+1} - U^{\nu_t}_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\nu_t \geqslant s}(U_{s+1} - U_s)|\mathcal{F}_s] = \mathbf{1}_{\nu_t\geqslant s}\mathbb{E}[(U_{s+1} - U_s)|\mathcal{F}_s] = 0.$$

2. L'enveloppe de Snell U est une $\mathbb{P}$-sur-martingale donc pour tout temps d'arrêt $\nu \in \mathcal{S}_{t,T}$ (donc borné) en utilisant $\forall t$, $U_t \geqslant H_t$,

$$U_t \geqslant \mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_t] \geqslant \mathbb{E}[H_\nu|\mathcal{F}_t]$$

donc $U_t \geqslant \sup_{\nu\in\mathcal{S}_{t,T}} \mathbb{E}[H_\nu|\mathcal{F}_t]$ et d'après le théorème d'arrêt de Doob,

$$\mathbb{E}[H_{\nu_t}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[U_{\nu_t}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[U_{T\wedge\nu_t}|\mathcal{F}_t] = U_{t\wedge\nu_t} = U_t$$

ce qui donne $U_t = \mathbb{E}[H_{\nu_t}|\mathcal{F}_t] = \sup_{\nu\in\mathcal{S}_{t,T}} \mathbb{E}[H_\nu|\mathcal{F}_t]$.

Temps d'arrêt optimaux

Definition

Un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt $\nu \in \mathcal{S}_{t,T}$ est appelé temps d'arrêt optimal pour le problème d'arrêt optimal associé à $(H_s)_{t \leqslant s \leqslant T}$ si

$$\mathbb{E}[H_\nu | \mathcal{F}_t] = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_{t,T}} \mathbb{E}[H_\tau | \mathcal{F}_t]$$

Lemma

1. $\nu_t := \min\{s \geqslant t : U_s = H_s\}$ *est un temps d'arrêt optimal pour* $(H_s)_{t \leqslant s \leqslant T}$.
2. *Un temps d'arrêt* $\nu \in \mathcal{S}_{t,T}$ *est optimal pour* $(H_s)_{t \leqslant s \leqslant T}$ *si et seulement si* $\mathbb{E}[H_\nu] = \mathbb{E}[U_t]$.

Démonstration.

1. C'est immédiat au vu de la proposition précédente.
2. On sait que ν est optimal si et seulement si $\mathbb{E}[H_\nu|\mathcal{F}_t] = \sup_{\nu\in\mathcal{S}_{t,T}} \mathbb{E}[H_\nu|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[H_{\nu_t}|\mathcal{F}_t] = U_t$ et donc $\mathbb{E}[H_\nu] = \mathbb{E}[U_t]$. Réciproquement, $\mathbb{E}[(U_t - \mathbb{E}[H_\nu|\mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[U_t - H_\nu] = 0$ or d'après le théorème d'arrêt de Doob

$$U_t \geqslant \mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_t] \geqslant \mathbb{E}[H_\nu|\mathcal{F}_t],$$

ainsi $U_t = \mathbb{E}[H_\nu|\mathcal{F}_t]$ et ν est optimal.

□

Theorem

Un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt ν est optimal pour $(H_s)_{t\leqslant s\leqslant T}$ si et seulement si :

1. $U_\nu = H_\nu$
2. *L'enveloppe de Snell arrêtée $(U_s^\nu)_{t\leqslant s\leqslant T}$ est une $\mathbb{P}$-martingale.*

Démonstration.

1. On considère un temps d'arrêt optimal ν pour $(H_s)_{0\leqslant s\leqslant T}$. Comme $U_\nu \geqslant H_\nu$ par construction, il suffit de montrer que $\mathbb{E}[H_\nu] \geqslant \mathbb{E}[U_\nu]$. Or, d'après le théorème d'arrêt de Doob, on a

$$\mathbb{E}[H_\nu] = \mathbb{E}[U_t] \geqslant \mathbb{E}[\mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[U_\nu].$$

2. On a pour tout $\nu \in \mathcal{S}_{t,T}$, $\mathbb{E}[U_{T\wedge\nu}] = \mathbb{E}[U_\nu] = \mathbb{E}[H_\nu] = \mathbb{E}[U_t] = \mathbb{E}[U_{t\wedge\nu}]$. Or $(U_s^\nu)_{t\leqslant s\leqslant T}$ est une surmartingale (d'après le théorème d'arrêt de Doob) donc $\mathbb{E}[U_T^\nu] \leqslant \mathbb{E}[U_s^\nu] \leqslant \mathbb{E}[U_t]$ pour tout $s \in \{t, \cdots, T\}$. On en déduit donc $\mathbb{E}[U_s^\nu] = \mathbb{E}[U_t]$ et comme $\mathbb{E}[U_{s+1}^\nu|\mathcal{F}_s] \leqslant U_s^\nu$ on a $\mathbb{E}[U_{s+1}^\nu|\mathcal{F}_s] = U_s^\nu$.

$\square$

Démonstration.

On prouve maintenant la réciproque. On a

$$\mathbb{E}[H_\nu] = \mathbb{E}[U_\nu] = \mathbb{E}[U_T^\nu] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U_T^\nu|\mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[U_t^\nu] = \mathbb{E}[U_t]$$

donc d'après les résultats précédents on conclut que ν est optimal pour $(H_s)_{t\leqslant s\leqslant T}$. $\square$