Produit cartésien et domaine de définition des fonctions à deux variables

1 Le produit cartésien

Effectuer le produit cartésien d'un ensemble E par un ensemble F, noté $E \times F$, consiste à associer chaque élément de E à chaque élément de F.

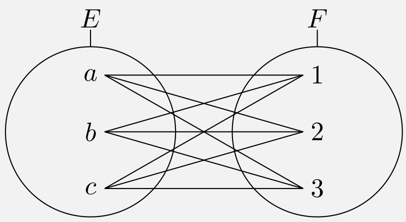
1. $E \times F$ se lit : "E produit cartésien F" ou "E croix F" mais pas E fois F.

2. Le produit cartésien de deux ensembles engendre des **couples** comme, par exemple, les deux coordonnées du plan.

3. Le produit fixe l'ordre des deux éléments de chaque couple. Le premier élément provient de E et le second de F.
   Remarque : Quelle est la différence entre un couple et une paire ?
   Une paire est un couple non ordonnée : la paire (x, y) est identique à la paire (y, x). Alors que le couple (x, y) est différent du couple (y, x).

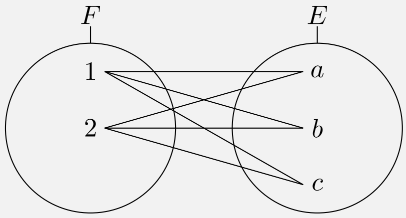
4. Un produit cartésien crée des couples, triplets, quadruplets... Pour les **fonctions à deux variables**, l'ensemble de définition est composé de couples de réels. Cela peut être le produit cartésien suivant : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que l'on note également $\mathbb{R}^2$. Cela peut être un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ comme lors du chapitre 1 du S1 avec la fonction de revenu de l'étudiant : $r(n_s; n_c) = 425 + 8,5 \times n_s + 12,75 \times n_c$. Le nombre d'heures de serveur ainsi que celui des cours particuliers sont nécessairement positifs ou nuls donc le domaine de définition sera le produit cartésien suivant : $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Exemple 1 : Soients $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2; 3\}$. Déterminer l'ensemble des éléments de l'ensemble $E \times F$.



$$E \times F = \{(a, 1); (a, 2); (a, 3); (b, 1); (b, 2); (b, 3); (c, 1); (c, 2); (c, 3)\}$$

Exemple 1 : Soient $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$. Déterminer l'ensemble des éléments de l'ensemble $F \times E$.



$F \times E = \{(1, a); (2, a); (1, b); (2, b); (1, c); (2, c)\}$

2 Domaine de définition des fonctions à deux variables

Une fonction est définie par une règle de calcul qui s'applique pour les couples de réels qui appartiennent à son domaine de définition. En supposant que l'on puisse calculer la valeur de la fonction pour tous les couples de réels : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le **domaine de définition** est alors noté $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui se lit R2 (et non R au carré).

Remarque : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est le **produit cartésien** de l'ensemble $\mathbb{R}$ par l'ensemble $\mathbb{R}$. Ce produit cartésien donne naissance à un nouvel ensemble $\mathbb{R}^2$ qui est composé de l'ensemble des couples (x, y) avec x un réel et y un réel : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$. Ce qu'il faut bien comprendre, c'est que le couple (x, y) est **ordonné** car les valeurs de x et de y ne sont pas interchangeables.

L'**ensemble d'arrivée** est composé de réels : $z = f(x, y)$. Les antécédents sont des couples alors que les images sont des réels.

Enfin, il est à noter que le **domaine de définition** n'est pas toujours égal à $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Lorsque la fonction comprend des racines, fractions ou logarithmes...alors, le domaine de définition est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

On peut maintenant donner l'expression d'une fonction à deux variables comme on le faisait pour les fonctions à une variable : **Soit une fonction f de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe au couple (x, y) le nombre réel** $z = f(x, y)$.

Exemple 3 : La fonction $f(x, y) = x^2 + y$ est définie $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$. Donc $D_f = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})\}$ ou $D_f = \mathbb{R}^2$.

Exemple 4 : La fonction $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ est définie $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}*$ car on ne sait toujours pas diviser par 0. Donc $D_f = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*)\}$.

Exemple 5 : La fonction $f(x, y) = \sqrt{x \times y}$ est définie si $x \times y \geq 0$ donc quand $x \geq 0$ et $y \geq 0$ OU quand $x \leq 0$ et $y \leq 0$: $D_f = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \cup (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-)\}$.

Par exemple, $f(-1; 1)$ n'est pas défini car $-1 \times 1 < 0$ alors que $f(-1; -1)$ est défini car $-1 \times -1 = 1 > 0$ avec $f(-1; -1) = \sqrt{1} = 1$.