Chapitre 1:
Introduction aux marchés financiers
Modèle binomial à une période.

Noufel Frikha

9 février 2024

Plan du chapitre 1

Présentation du cours

- Le cours est divisé en deux parties :
  - Cours magistraux en Amphi noufel.frikha@univ-paris1.fr
  - Travaux dirigés effectués par Georgy Shornin, adresse email directement transmise en TD.

- La note finale du module est composée de :
  - la note du partiel.
  - la note de l'examen finale
  - éventuellement la note rattrapage...

- Pour toutes questions relatives au cours, email : noufel.frikha@univ-paris1.fr

Objectifs du cours

○ Objets du cours : Introduction à la modélisation financière à temps discret et aux méthodes mathématiques utilisées en finance.

○ Objectifs du cours :

1. Comprendre les bases de la théorie des options et les notions de gestion des risques
2. Maîtriser les outils mathématiques introduits : arbre binomial, chaîne de Markov, martingale à temps discret, enveloppe de Snell, ...
3. Savoir les mettre en pratique de façon concrète sur des problèmes issues des mathématiques financìeres.

Les notions importantes à maîtriser

- Quelques notions importantes :
  - en finance
    1. Valorisation : comment définir le prix, la valeur d'un produit financier ?
    2. Couverture : comment minimiser voire annuler le risque associé à un produit financier ?
    3. Arbitrage : plus précisemment la notion d' “Absence d'Opportunité d'Arbitrage” (AOA) permet de définir le concept de “juste prix”.
    4. Optimisation de portefeuille selon H. Markowitz
  - en mathématiques
    1. Processus stochastique à temps discret : évolution aléatoire des prix d'actions, de la valeur d'un portefeuille de marché, ...
    2. Martingale, enveloppe de Snell à temps discret
    3. Optimisation d'une fonction sous contrainte

Marché financier

- Rôle :
  - allocation de liquidités : certains acteurs des marchés ont des besoins de financement (par ex. Etat) alors que d'autres ont des capacités de placement.
  - transfert du risque : cela se fait par l'échange de produits financiers (par ex. produit dérivé sur les taux d'intérêt ou taux de change)
  - vecteur d'information par les prix d'actifs

- Moyen : échanges de titres sur un marché financier. Contrat qui donne le droit à une séquence de flux de trésorerie (obligations, actions, options, etc...)

- Caractéristiques :
  - offre = demande. Chaque acteur trouvera une contrepartie acceptant de traiter au prix de marché
  - équilibre : aucun acteur n'a un poids relatif suffisant pour influencer les prix par ses offres ou demandes.
  - liquide : chaque acteur peut prendre et se libérer de ses positions en actifs au prix du marché. En particulier, il n'y a pas de coûts de transaction et pas d'interdictions de vente à découvert.
  - efficient : les prix incorporent toute l'information disponible, il n'y a pas d'asymétrie d'information.
  - AOA : absence d'opportunité d'arbitrage ou “no free lunch”. Il est impossible d'établir une stratégie de mise initiale nulle et de gagner de l'argent à coup sûr.

Rappels sur les taux d'intérêt

- Opération de prêt-emprunt à deux flux sur une période de temps de $t = 0$ à $t = 1$.

- Exemple : emprunt d'un capital prêté = C, intérêts dus en $t = 1$ = I.

$$\begin{tikzcd}
+C & \\
t = 0 \arrow[u] \arrow[r] & t = 1 \arrow[d] \\
& -(C + I)
\end{tikzcd}$$

◦ Taux d'intérêt : 1 unité monétaire acquise aujourd'hui vaut plus que la même unité acquise dans un an.

- cas périodique : C unité monétaire placé durant une période (1 an) donne les intérêts : $I = Cr$.
- cas continu : C unité monétaire placé durant une période (1 an) donne les intérêts : $I = C(e^r - 1)$.

◦ On supposera que les *intérêts sont composés* : ils s'ajoutent en fin de chaque période au capital, et ils produisent alors eux-mêmes des intérêts au cours de la période suivante.

- cas périodique : C unité monétaire placé durant n périodes (n années) donne les intérêts : $I = C((1 + r)^n - 1)$.
- cas continu : C unité monétaire placé durant n périodes (n années) donne les intérêts : $I = C(e^{nr} - 1)$.

Obligation (bonds) à coupons constants

- Une obligation est un titre de créance qui donne lieu à des paiements d'intérêt (ou des coupons) et à un remboursement du principal (montant emprunté).

- Ce sont des titres de créances négociables car standardisées : après émission, elles peuvent être échangées à un prix de marché.

- Exemple du prêteur

$$
\begin{tikzcd}
 & C & C & & C & & C + P(0) \\
t = 0 \arrow[r] \arrow[d] & t = t_1 \arrow[r] \arrow[u] & t = t_2 \arrow[r] \arrow[u] & \dots \arrow[r] & t = t_i \arrow[r] \arrow[u] & \dots \arrow[r] & t = t_N \arrow[u] \\
-P(0) & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Obligation zéro-coupon (ZCB)

○Elle ne verse aucun coupon entre la date $t = 0$ et sa maturité.
○ Exemple du prêteur :

$$\begin{tikzcd} & C + P(0) \\ t = 0 \arrow[r] \arrow[d] & t = t_N \arrow[u] \\ -P(0) & \end{tikzcd}$$

○ On n'observe pas directement les taux d'intérêt mais seulement le prix des zéro-coupon pour différentes maturités T.
○ Si $B_0(T)$ est le prix à la date d'une obligation zéro-coupon (ZCB) versant 1 euro en T. Pour un taux d'intérêt supposé constant, on a :

- ○ taux périodique (composé T fois) : $B_0(T) = 1/(1+r)^T = (1+r)^{-T}$.
- ○ taux continu : $B_0(T) = 1/e^{rT} = e^{-rT}$.

Les marchés organisés d'options

- 1973 :
  - CBOE : Chicago Board of Options Exchange
  - Publication de l'article “The pricing of options and corporate liabilities” de Fisher Black et Myron Scholes.
- 1978 : London Traded Option Exchange
- 1987 : MONEP (Marché d'Options Négotiables de Paris)

Quelques participants des marchés

○ Les brokers (ou courtiers) exécutent les ordres des investisseurs.

○ Les market makers (teneurs de marché) risquent leur propre capital et assurent la liquidité du marché. Les spécialistes affichent en permanence les prix sur les options les plus liquides. Les contrepartistes répondent aux demandes de prix.

○ La chambre de compensation sert à éliminer le risque de contrepartie. Elle peut demander aux vendeurs d'options le versement des appels de marge.

Différents types de sous-jacent

- Actions. CBOE : 1332 actions, MONEP : 67 actions.
- Indices : Nasdaq, Dow Jones, S&P 500, CAC 40, ..., indices sectoriels : PHLX Semiconductor, ...
- Taux de change
- Obligations ou swaps
- Futures sur marchandises (commodity) : cacao, café, sucre, blé, ...

Les options européennes

- Exercice possible uniquement à la maturité T. Le payoff ne dépend que du prix du sous-jacent (actif risqué) à la date finale.

$$\text{Call :} \quad H_T = (S_T - K)_+ \qquad \text{Put :} \quad H_T = (K - S_T)_+$$

- K : strike (prix d'exercice)
- Une option est *à la monnaie* à la date $t \iff K = S_t$.
- *dans la monnaie* $\iff$ le payoff aujourd'hui est positif.
- *Valeur intrinsèque :* la valeur du payoff aujourd'hui.
- *Valeur temps :* prix moins valeur intrinsèque.
- Les options sur indices sont typiquement européennes.

Propriétés des Call et des Put

○ Parité call-put :

$$Call_t(T,K) - Put_t(T,K) = S_t - KB(t,T)$$

Conséquence :

$$(S_t - K)+ \leqslant (S_t - KB(t,T))_+ \leqslant Call_t(T,K) \leqslant S_t$$

○ $K_1 \leqslant K_2 \Rightarrow Call_t(T,K_1) \geqslant Call_t(T,K_2)$
Call spread : acheter Call (T,K_1), vendre Call (T,K_2).
○ Les prix des calls/puts sont convexes en K
Butterfly : acheter Call (T,K_1), vendre deux Call $(T,(K_1+K_2)/2)$, acheter Call (K_2,T)
○ $T_1 \leqslant T_2 \Rightarrow Call_t(T_1,K) \leqslant Call_t(T_2,K)$.
Calendar spread : acheter Call (T_2,K), vendre Call (T_1,K).

Autres types d'options :

○ Américaines : exercice possible à toute date avant la maturité ; pas de parité call-put. Options bermudéennes : exercice possible à certaines dates.

○ Options à barrière : le paiement a lieu (n'a pas lieu) si le sous-jacent a depassé un niveau contractuel (la barrière) avant cette date. Exemple (up and out call)

$$H_T = (S_T - K)_+ \mathbf{1}_{M_T < B}, \quad M_T = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} S_t$$

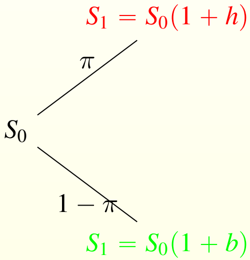
moins chère que le Call standard.
○ Options asiatiques : le payoff dépend de la valeur moyenne de sous-jacent pendant la vie de l'option (pour empêcher la manipulation des prix) :

$$H_T = \left(\frac{1}{T-t} \int_t^T S_s \, ds - K \right)_+$$

Plan du chapitre 1

Modélisation du marché

- C'est un marché financier à deux dates $t = 0$ et $t = 1$ et deux actifs :
  - Un actif sans risque (ou numéraire) qui vaut 1 aujourd'hui, c'est-à-dire à la date $t = 0$ et $1 + r$ en $t = 1$.
  - Un actif risqué qui vaut S_0 en $t = 0$ et peut prendre deux valeurs à l'instant $t = 1$ selon l'arbre suivant



- On suppose $h > b > -1$, $\pi = \mathbb{P}(S_1 = S_0(1+h)) > 0$, $1 - \pi = \mathbb{P}(S_1 = S_0(1+b)) > 0$ donc $\pi \in (0, 1)$.

- Pour modéliser l'aléa du marché, on a recours à un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:
  - Ω est l'ensemble des états possibles $\Omega = \{w_h, w_b\}$ avec $w_h = \{S_1 = S_0(1+h)\}$ et $w_b = \{S_1 = S_0(1+b)\}$.
  - $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1\}$ avec
    - $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ information disponible à la date 0.
    - $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{w_h\}, \{w_b\}\}$.
    - On observe l'inclusion $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$. L'information augmente au fil du temps.
  - $\mathbb{P}$ mesure de probabilité historique, vraisemblance des évènements.

Definition (Produit dérivé)

Un produit dérivé est (assimilé à) une variable aléatoire X *mesurable* par rapport à $\mathcal{F}_1$ donc içi vérifiant $X = \phi(S_1)$ pour un certain ϕ.

- Exemples : payoff d'une option Call $\phi(S_1) = (S_1 - K)_+$, Put $\phi(S_1) = (K - S_1)_+$.

Definition (Stratégie de portefeuille)

Une stratégie de portefeuille est un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ où α représente la quantité d'actifs risqués et β la quantité d'actifs sans risque détenues à la date 0.

◦ Pour un tel portefeuille, la valeur $(V_t^{(\alpha,\beta)})_{t\in\{0,1\}}$ vérifie

$$V_0^{(\alpha,\beta)} = \alpha S_0 + \beta \times 1 \quad \text{et} \quad V_1^{(\alpha,\beta)} = \alpha S_1 + \beta(1+r).$$

c'est-à-dire qu'il y a deux possibilités :

$$V_1^{(\alpha,\beta)}(w_h) = \alpha S_0(1+h)+\beta(1+r) \quad \text{et} \quad V_1^{(\alpha,\beta)}(w_b) = \alpha S_0(1+b)+\beta(1+r).$$

◦ On peut de façon totalement équivalente donner la valeur de α et la richesse initiale $V_0 = v$. Alors dans ce cas $\beta = v - \alpha S_0$ puisque

$$V_0^{(v,\alpha)} = \alpha S_0 + (v - \alpha S_0) \times 1 = v \quad \text{et} \quad V_1^{(\alpha,v)} = \alpha S_1 + (v - \alpha S_0)(1+r).$$

◦ On parle aussi de stratégie auto-finançante car on n'apporte ni ne retire de l'argent entre $t = 0$ et $t = 1$.

Une opportunité d'arbitrage est une stratégie d'achat ou de vente d'actifs, de titres, ... qui ne coûte rien aujourd'hui et rapporte des gains strictement positifs à une date future. Mathématiquement, dans un marché binomial à une période, on a la définition suivante :

Definition (Stratégie d'arbitrage)

Une opportunité d'arbitrage (entre les dates 0 et 1) est une stratégie auto-finançante $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ dont la valeur vérifie :

1. $V_0^{(\alpha,\beta)} = 0$.
2. $V_1^{(\alpha,\beta)} \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(V_1^{(\alpha,\beta)} > 0) > 0$.

Par conséquent, l'absence d'opportunité d'arbitrage s'écrit :

$$\text{Si } V_0^{(\alpha,\beta)} = 0 \quad \text{alors} \quad \left\{ V_1^{(\alpha,\beta)} \geqslant 0 \Rightarrow V_1^{(\alpha,\beta)} = 0 \right\}.$$

Theorem (Conséquence de l'AOA)

AOA $\Rightarrow b < r < h$.

Preuve

- Supposons $r \leqslant b$:
  - En $t = 0$, on construit le portefeuille suivant $(\alpha, \beta) = (1, -S_0)$. Achat de l'actif risqué et emprunt de S_0 euros au taux r. Alors, $V_0^{(\alpha,\beta)} = 1 \times S_0 - S_0 \times 1 = 0$
  - En $t = 1$, on a $V_1^{(\alpha,\beta)} = S_1 - S_0(1+r)$ donc $V_1(w_h) = S_0(h-r) > 0$ et $V_1(w_b) = S_0(b-r) \geqslant 0$. Il s'agit donc d'un arbitrage !
- Supposons $r \geqslant h$:
  - En $t = 0$, on construit le portefeuille suivant $(\alpha, \beta) = (-1, S_0)$. Vente de l'actif risqué (à découvert) et prêt de S_0 euros au taux r. Alors, $V_0^{(\alpha,\beta)} = -1 \times S_0 + S_0 \times 1 = 0$
  - En $t = 1$, on a $V_1^{(\alpha,\beta)} = -S_1 + S_0(1+r)$ donc $V_1(w_h) = S_0(r-h) \geqslant 0$ et $V_1(w_b) = S_0(r-b) > 0$. Il s'agit donc d'un arbitrage !
- Conclusion : on a donc bien $b < r < h$.

Valorisation de produits dérivés dans un marché sans arbitrage.

◦ Valorisation. On se pose la question : quel est le prix en $t = 0$ d'un produit dérivée rapportant $\phi(S_1)$ en $t = 1$ à son acheteur ?

◦ Principe de couverture/réplication : Est ce que le vendeur peut se couvrir ? Il s'agit de construire un portefeuille auto-finançant dont la valeur V_1 à la date $t = 1$ est égale à $\phi(S_1)$ (pour les deux états du marché w_h et w_b).

◦ Si c'est le cas, alors le prix de l'actif sera la valeur initiale du portefeuille V_0 qui permet cette couverture, c'est-à-dire qui le réplique on parle alors de prix de non-arbitrage.
Il s'agit du principe bien connu suivant :

S'il y a AOA et si deux stratégies financières génèrent le même flux à la date $t = 1$ alors elles ont la même valeur à la date $t = 0$.

Probabilité risque-neutre

- On introduit les valeurs actualisées des actifs et du portefeuille

$$\widetilde{V}_t = \frac{V_t}{(1+r)^t}, \quad \widetilde{S}_t = \frac{S_t}{(1+r)^t}, \quad \widetilde{S}^0_t = \frac{S^0_t}{(1+r)^t} = \frac{(1+r)^t}{(1+r)^t} = 1, \quad t = 0, 1.$$

On a donc par exemple $\widetilde{S}_1 = \frac{S_1}{1+r}$ et $\widetilde{S}_0 = S_0$.

Definition (Probabilité risque neutre)

On appelle probabilité risque-neutre toute probabilité équivalente $\mathbb{Q}$ telle que $\widetilde{S} = (\widetilde{S}_t)_{t\in\{0,1\}}$ soit une martingale sous $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{S}_1] = \widetilde{S}_0 \iff \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1]}{1+r} = S_0.$$

Theorem

$b < r < h \iff$ *il existe une unique proba* $\mathbb{Q}$ *risque-neutre* $\iff$ *AOA.*

Démonstration.

◦ Supposons $b < r < h$ alors en notant $p = \mathbb{Q}(w_h)$ on a

$$\mathbb{E}[\widetilde{S}_1] = \widetilde{S}_0 = S_0 \iff \frac{1}{1+r}(pS_0(1+h) + (1-p)S_0(1+b)) = S_0$$

ce qui donne

$$p = \mathbb{Q}(w_h) = \frac{r-b}{h-b} \in (0,1)$$

Donc, en définissant $\mathbb{Q}(w_h) := \frac{r-b}{h-b}$ et $\mathbb{Q}(w_b) := 1 - \frac{r-b}{h-b} = \frac{h-r}{h-b}$, on a $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$.

◦ Maintenant si il existe une unique proba $\mathbb{Q}$ risque-neutre alors a fortiori $\mathbb{Q}(w_h) := \frac{r-b}{h-b} \in (0,1)$ et donc on a $b < r < h$. □

Démonstration.

◦ Il nous reste à montrer $b < r < h \Rightarrow$ AOA. Pour cela, on sait qu'il existe une unique proba $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ telle que : $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{S}_1] = S_0$.
Supposons qu'il existe un portefeuille (α, β) tel que $V_0^{(\alpha,\beta)} = 0$ et $V_1 \geqslant 0$. Alors

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V}_1] &= \frac{1}{1+r}(\alpha(1+r) + \beta(pS_0(1+h) + (1-p)S_0(1+b)) \\
&= \alpha + \beta S_0 \\
&= \widetilde{V}_0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Or $\widetilde{V}_1 \geqslant 0$ donc on a $\widetilde{V}_1 = 0$ sous $\mathbb{Q}$ donc $\widetilde{V}_1 = 0$ sous $\mathbb{P}$. Donc, on a AOA. □

On remarque au passage que nous avons montré que $\widetilde{V}$ est une martingale sous la probabilité risque-neutre.

Definition (marché complet)

On dit que le marché est complet si tout produit dérivé est réplicable par une stratégie de portefeuille auto-finançante.

Theorem (Valorisation d'un produit dérivé)

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, le marché est complet. Autrement dit, tout produit dérivé de payoff $\phi(S_1)$ est réplicable par une stratégie auto-finançante. Le prix du produit dérivé à la date 0 vérifie donc

$$p_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\widetilde{V}_1] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\phi(S_1)}{1+r}\right].$$

Démonstration.

On suppose qu'il y a AOA. Donc, d'après le théorème précédent, il existe une unique probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ vérifiant $\mathbb{Q}(w_h) = \frac{r-b}{h-b}$.

On souhaite construire $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $V_1^{(\alpha,\beta)} = \phi(S_1)$. On obtient le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} V_1(w_h) = \alpha S_0(1+h) + \beta(1+r) = \phi(S_0(1+h)) \\ V_1(w_b) = \alpha S_0(1+b) + \beta(1+r) = \phi(S_0(1+b)) \end{cases}$$

Cela donne

$$\alpha = \frac{\phi(S_0(1+h)) - \phi(S_0(1+b))}{S_0(1+h) - S_0(1+b)}$$

et

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{1+r}\left\{\phi(S_0(1+h)) - \frac{\phi(S_0(1+h)) - \phi(S_0(1+b))}{h-b}(1+h)\right\} \\ &= \frac{1}{1+r}\frac{\phi(S_0(1+b))(1+h) - \phi(S_0(1+h))(1+b)}{h-b}. \end{aligned}$$

◦ Pour finir, on remarque aussi que

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \alpha S_0 + \beta \\
&= \frac{\phi(S_0(1+h)) - \phi(S_0(1+b))}{h-b} \\
&\quad + \frac{1}{1+r} \frac{\phi(S_0(1+b))(1+h) - \phi(S_0(1+h))(1+b)}{h-b} \\
&= \frac{1}{1+r} \left\{ \frac{\phi(S_0(1+h))(r-b) + \phi(S_0(1+b))(h-r)}{h-b} \right\} \\
&= \frac{1}{1+r} \left\{ \mathbb{Q}(w_h)\phi(S_0(1+h)) + (1-\mathbb{Q}(w_h))\phi(S_0(1+b)) \right\} \\
&= \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_1)].
\end{aligned}
$$

On voit donc que le prix de l'option est l'espérance sous la proba risque-neutre du payoff actualisé.

◦ On voit que le prix d'une option ainsi que la stratégie de couverture sont indépendants de π, la probabilité historique !

Exemple : évaluation d'un Call.

On prend $S_0 = K = 100$ (Call à la monnaie), $r = 5\%$, $b = -0.1$, $h = 0.1$.

1. Y a-t-il AOA ?
2. Quel est le prix de ce Call ?
3. Calculer la stratégie de réplication.

Exemple : évaluation d'un Call.

1. On a $-1 < b = -0.1 < r = 0.05 < h = 0.1$. Il y a donc AOA.
2. On calcul la probabilité risque neutre

$$p = \frac{r-b}{h-b} = \frac{0.15}{0.2} = 0.75$$

on en déduit donc

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_1 - K)_+] \\ &= \frac{1}{1+r}(p(S_0(1+h)-K)_+ + (1-p)(S_0(1+b)-K)_+) \\ &= \frac{1}{1.05}(0.75 \times (110-100)_+ + 0.25 \times (90-100)_+) \\ &= 7.14€ \end{aligned}$$

3.

$$\alpha = \frac{\phi(S_0(1+h)) - \phi(S_0(1+b))}{S_0(h-b)} = \frac{10}{20} = 0.5,$$

$$\beta = 7.14 - 0.5 \times 100 = -42.86€$$

Quelques références

- D. Lamberton, B. Lapeyre : *Introduction au calcul stochastique appliquée à la finance*, 1997.
- L. Carassus et G. Pagès : *Finance de marché*, 2015.