UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Mathématiques - L1 Économie.

Semestre 2 - Année 2023/2024

COURS

Chapitres 6 et 7

Cours magistraux			
Division	Jour et horaire	Amphi	Enseignant
1	Vendredi 12h30-13h30	Amphi I	S. Jallais
2	Mardi 9h30-10h30	Amphi J	J. Lecointre
3	Mardi 16h00-17h00	Amphi L	J. Lecointre

DE/TD			
Groupes de TD	Jour et horaire	Amphi	Enseignant
TD 1101 / 1102 / 1103 / 1104	Lundi 16h00 -17h30	Amphi H	N. Touré
TD 1105 / 1106 / 1107	Lundi 11h30 - 13h00	Amphi L	N. Canry
TD 1108/ 1109 / 1110 / 1111	Mardi 12h00-13h30	Amphi J	J. Lecointre
TD 1201 / 1202 / 1203	Mercredi 17h30-19h00	Amphi J	O. Joya
TD 1204 / 1205 / 1211	Lundi 15h30-17h00	Amphi K	JF. caulier
TD 1206 / 1208 / 1212	Samedi 11h30 -13h00	Amphi J	V. Calaud
TD 1207 / 1209 / 1210	Mercredi 9h00-10h30	Amphi K	L. Pejsachowicz
TD 1301 / 1303 / 1305	Vendredi 14h00-15h30	Amphi K	S. Jallais
TD 1302 / 1304 / 1306	Mercredi 11h30-13h00	Amphi L	S. Jallais
TD 1307 / 1308 / 1309 / 1310	Mercredi 16h-17h30	Amphi K	O. Joya

Chapitre 6

Introduction à l'intégration

1 Primitives

On sait calculer la fonction dérivée d'une fonction f. Si elle existe, cette fonction dérivée est unique. Calculer une primitive revient à se poser la question suivante : **connaissant une fonction f, quelles sont les fonctions F telles que $F' = f$?** C'est, en quelle sorte, le chemin inverse du calcul d'une fonction dérivée.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle **primitives** de f sur I toutes les fonctions F dérivables sur I telle que, pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$.

Théorème d'existence des primitives : Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors f admet des primitives sur I . Si F est une primitive de f sur I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme : $F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. En d'autres termes, la primitive est définie à une constante près, et il en existe une infinité.

Exemple 120 : Soit $f(x) = 2x$ alors une primitive de cette fonction sera $F(x) = x^2 + 3$ car $F'(x) = 2x$. Mais on se rend compte que la fonction $G(x) = x^2 + 1$ est aussi une primitive de $f(x)$ car $G'(x) = f(x)$. Ainsi, toutes les fonctions de la forme $H(x) = x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$ sont des primitives de la fonction $f(x)$.

Savoir calculer les fonctions primitives d'une fonction f permettra de réaliser des calculs d'intégration (cf. section 2).

Le tableau ci-dessous donne les principales primitives y compris celles des fonctions composées. Attention, la constante n'apparait pas dans le tableau.

Fonction	Une primitive	Fonction	Une primitive
$f(x) = a$	$F(x) = a \times x$	$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$f(x)$ [1] $= \ln(x)$	$F(x) = x\ln(x) - x$

Le tableau ci-dessous donne les principales primitives y compris celles des fonctions composées. Attention, la constante n'apparait pas dans le tableau.

Fonction	Primitive	Fonction	Primitive
Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions			
$f(x) = u(x)' \times u(x)^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1} \times u(x)^{n+1}$	$f(x) = \frac{u(x)'}{2 \times \sqrt{u(x)}}$	$F(x) = \sqrt{u(x)}$
$f(x) = \frac{u(x)'}{u(x)}$	$F(x) = \ln(u(x))$	$f(x) = u(x)' \times e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)}$

Exemple 121 : $f(x) = x^2$ donc $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2$; $G(x) = \frac{x^3}{3}$; $H(x) = \frac{x^3}{3} - 1000$ sont des primitives de $f(x)$.

Exemple 122 : $g(x) = x^3$ donc $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2$; $G(x) = \frac{x^4}{4}$; $H(x) = \frac{x^4}{4} - 1000$ sont des primitives de $g(x)$.

Exemple 123 : $h(x) = 6x \times (x^2+1)^2$. On constate que $h(x) = 3 \times 2x \times (x^2+1)^2$. C'est de la forme $n \times U'(x) \times U(x)^{n-1}$ donc $H(x) = (x^2+1)^3 + k$.

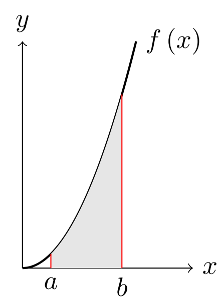
Exemple 124 : $i(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$. C'est de la forme $\frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$ donc $I(x) = 2\sqrt{2x-1} + k$.

Exemple 125 : $j(x) = \frac{2}{(2x-1)}$. C'est de la forme $\frac{u(x)'}{u(x)}$ donc $J(x) = \ln(2x-1)$

2 Intégrales de fonctions à valeurs positives

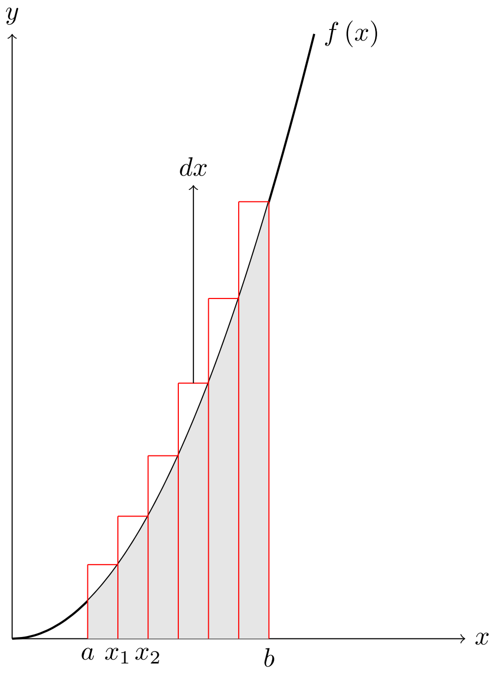
2.1 Définition et interprétation dans le cas d'une fonction à valeurs positives

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$. L'**intégrale définie** de f sur $[a,b]$ permet de mesurer l'aire (exprimée en unité d'aire [2]) de la surface délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ où a et b sont les bornes de l'intervalle avec nécessairement $a \leq b$. **Une intégrale est donc un nombre positif ou nul** alors qu'**une primitive est une fonction**.



Pour comprendre comment on calcule l'aire grisée découpons l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles égaux de longueur $dx = \frac{b-a}{n}$ (cf. graphique ci-dessous).

2. Si les axes sont perpendiculaires et si l'unité est 2cm pour l'axe des abscisses et 2cm pour l'axe des ordonnées, l'unité d'aire sera de $2 \times 2 = 4cm^2$.



On peut, alors, approcher la valeur de l'aire par la somme des aires des rectangles représentés ci-dessus. Chacun de ces rectangles a pour largeur dx et pour hauteur $f(x_k)$ avec $x_k = a + k \times dx$ pour $k = 1, ..., n$. L'aire de la surface composée par le somme des rectangles est alors :

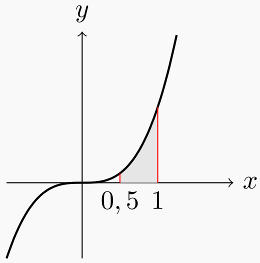
$$A_n = \sum_{k=1}^{k=n} f(x_k) \times dx$$

Pour calculer l'intégrale, il faut découper l'intervalle $[a, b]$ en une infinité de rectangles (donc $n \to \infty$) dont la largeur est infinitésimale (donc $dx \to 0$). Dans ce cas, on n'utilise plus le symbole $\sum$ de la somme mais le symbole $\displaystyle\int$ de la *somme intégrale* :

$$A = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

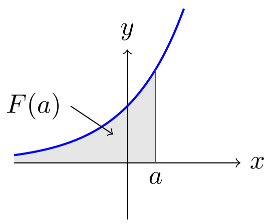
On retrouve le terme dx qui correspond à la largeur des rectangles, qui est ici infiniment petite car $dx \to 0$. **Il ne faut pas oublier le** dx quand on écrit une intégrale. Il permet de savoir que l'on intègre par rapport à x.

Exemple 126 : L'aire située sous la courbe de $f(x) = x^3$ et entre les bornes $x = 0,5$ et $x = 1$, s'écrit $\displaystyle\int_{0,5}^{1} x^3 \, \mathrm{d}x$



2.2 Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Soit $F(x)$, la primitive de $f(x)$ avec une constante nulle alors : $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = F(a)$.



On peut en déduire que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = F(b) - F(a) \text{ avec } a < b$$

Par convention, on note $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

Pour calculer l'intégrale d'une fonction à valeurs positives, on va donc, le plus souvent, chercher sa primitive à constante nulle dans le tableau (cf. encadrés 31 et 32) puis appliquer la formule.

Exemple 127 : La fonction $f(x) = x^2$ a pour primitive à constante nulle $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$.
Ainsi, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$.
Soit, $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{63}{3}$.

Dans certains cas, la primitive n'est pas dans le tableau. On doit alors utiliser une autre méthode (voir sous section 2.4).

2.3 Propriétés

Les propriétés découlent directement du fait que les intégrales sont des sommes d'aires.

Opérations sur les intégrales

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^b (k \times f(x))\,dx = k \times \int_a^b f(x)dx$$

Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Exemple 128 : Nous avons calculé précédemment $\int_1^4 f(x)\,dx = \frac{63}{3}$. Calculons l'intégrale sur l'intervalle $[1;3]$ puis sur l'intervalle $[3;4]$ afin d'appliquer la première propriété.

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$$

.

$$\int_3^4 f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{37}{3}$$

.

On constate bien que $\frac{26}{3} + \frac{37}{3} = \frac{63}{3}$

Exemple 129 : $\int_1^1 f(x)\,dx = F(1) - F(1) = 0.$

Exemple 130 : $\int_1^5 f(x)\,dx = F(5) - F(1) = -(F(1) - F(5)) = -\int_5^1 f(x)\,dx.$

2.4 Calcul d'une intégrale en utilisant l'intégration par partie

Lorsque la fonction $f(x)$ n'est pas dans le tableau des primitives. On peut appliquer la méthode de l'intégration par parties qui repose sur la formule suivante :

$$F(x) = \int u(x) \times v'(x) \;\mathrm{d}x = u(x) \times v(x) - \int u'(x) \times v(x) \;\mathrm{d}x$$

A partir de cette primitive, on peut en déduire l'intégrale sur l'intervalle $[a,b]$:

$$\int_a^b u(x) \times v'(x) \;\mathrm{d}x = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) \;\mathrm{d}x$$

avec u et v deux fonctions admettant des dérivées continues sur l'intervalle $[a,b]$ et $a < b$.

En pratique, on veut calculer $\int_a^b f(x)\,dx$ avec $f(x)$ qui n'est pas dans le tableau des primitives. On cherche deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$ dérivables sur $[a,b]$ telles que la fonction $f(x)$ puisse s'écrire sous la forme $f(x) = u'(x) \times v(x)$ puis on applique la formule.

Comment expliquer la formule de l'intégration par parties ?

On se souvient que $(u(x) \times v(x))' = u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)$ donc
$u'(x) \times v(x) = (u(x) \times v(x))' - u(x) \times v'(x)$. On intègre chaque membre de cette équation :

$$\int_a^b (u'(x) \times v(x))\,dx = \int_a^b (u(x) \times v(x))'\,dx - \int_a^b (u(x) \times v'(x))\,dx$$

$$\int_a^b (u'(x) \times v(x))\,dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b (u(x) \times v'(x))\,dx$$

Exemple 131 : La primitive de la fonction $f(x) = x \times \ln(x)$ n'est pas dans le tableau des primitives.

On cherche deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$ telles que $f(x)$ s'écrive sous la forme $f(x) = u'(x) \times v(x)$. Ici, comme $ln(x)$ n'est pas la dérivée d'une fonction connue, on va choisir $v(x) = \ln(x)$ et $u'(x) = x$. Pour appliquer la formule, il reste à calculer $u(x) = \frac{x^2}{2}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

On peut, alors, appliquer la formule de l'intégration par parties :

$$F(x) = \int (x \times \ln(x))\, dx = \frac{x^2}{2} \times \ln(x) - \int \left(\frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \times \ln(x) - \int \frac{x}{2}\, dx$$

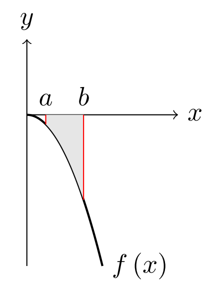
$$F(x) = \frac{x^2}{2} \times \ln(x) - \frac{x^2}{4} + k$$

On peut vérifier en dérivant la fonction $F(x) = \frac{x^2}{2} \times \ln(x) - \frac{x^2}{4} + k$:
$F'(x) = \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} + x \times \ln(x) + \frac{2x}{4} = x \times \ln(x)$.

3 Intégrale d'une fonction à valeurs négatives ou alternativement à valeurs positives et négatives

3.1 Fonction à valeurs négatives

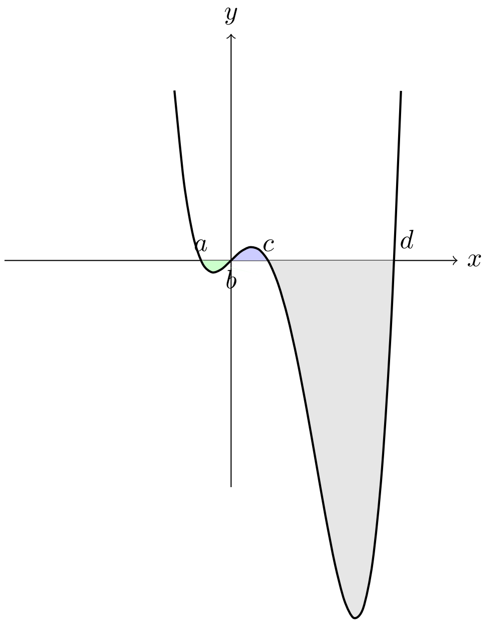
Lorsque la fonction est à valeurs négatives, $f(x) < 0$, l'intégrale prend elle même une valeur négative et ne peut plus être interprétée comme l'aire située entre la courbe et l'axe des abscisses (cf. zone grisée ci-dessous). Pour calculer l'aire de la zone grisée, il faut mettre "-" devant l'intégrale afin que le résultat soit positif. En effet, une aire est une surface donc nécessairement positive !



Pour calculer l'aire entre $[a; b]$, on calcule : $A = -\int_a^b f(x)\, dx = -(F(b) - F(a)) = F(a) - F(b)$

3.2 Lorsque la fonction est alternativement positive et négative

Pour calculer l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses, il faut, dans ce cas, utiliser la relation de Chasles. Dans le graphique ci-dessous, la fonction est négative sur $[a; b] \cup [c; d]$ et positive sur $[c; d]$.



L'aire totale est égale à $A = -\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx$

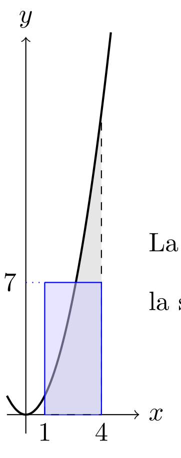
4 Valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)\,dx$$

.

On en déduit que $\mu \times (b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$. Le produit $\mu \times (b-a)$ est la mesure de l'aire d'un rectangle de base $[a; b]$.



La surface bleue 7×3 est égale à la surface grise $\int_1^4 x^2 dx$.

Exemple 132 : La valeur moyenne sur l'intervalle $[1, 4]$ de la fonction $f(x) = x^2$ est égale à

$$m = \frac{1}{4-1} \times \int_1^4 f(x)\,dx = \frac{1}{3} \times \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{63}{9} = 7.$$

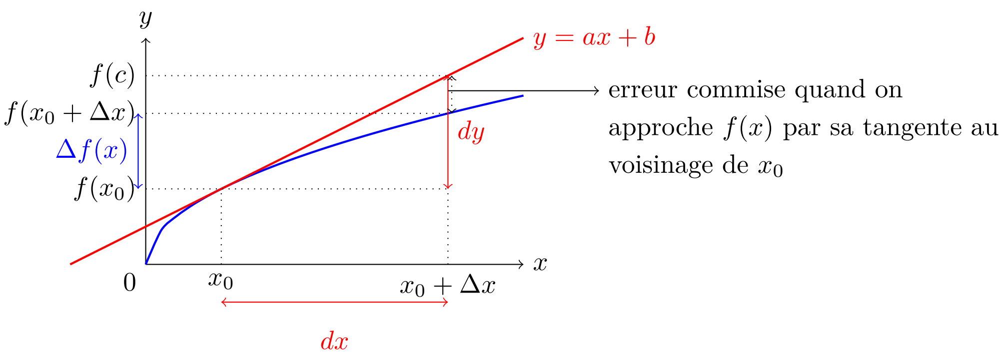
Chapitre 7

Approximation d'une fonction par un polynôme : introduction aux développements limités

1 Approximation affine avec la tangente et la différentielle en un point

La différentielle d'une fonction permet de réaliser une approximation linéaire locale d'une fonction à partir de la tangente. Il s'agit de remplacer localement la courbe de la fonction $f(\cdot)$ par sa tangente afin de donner une approximation de l'impact d'une variation de x sur $y = f(x)$, approximation d'autant meilleure que la variation de x est petite.

Supposons que la fonction $f(\cdot)$ soit dérivable en x_0 et que cette dérivée soit non nulle. Ainsi, la fonction admet une tangente non horizontale en x_0.



A partir du point $(x_0; f(x_0))$, on cherche à évaluer l'impact d'une variation de x sur la variable $y = f(x)$.

1. La "vraie" variation est égale à : $\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
2. La variation de y le long de la tangente est égale à $dy = a \times dx$ où $a = f'(x_0)$ par définition de la tangente.

   On considère que, pour de petites variations de x, dy est une bonne approximation de $\Delta f(x)$.
   La variation estimée avec la tangente est donc le nombre dy tel que $dy = f'(x_0) \times dx$.
3. ε est l'erreur commise avec cette approximation. L'erreur sera d'autant plus faible que $\Delta x \to 0$. C'est-à-dire que l'on est proche de $(x_0; f(x_0))$.

Exemple 133 : : Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. A partir de $x_0 = 1$ estimer l'erreur commise lorsque l'on calcule $\sqrt{1,05}$ puis lorsqu'on calcule $\sqrt{2}$ en utilisant l'approximation affine par la tangente.

Approximation de $\sqrt{1,05}$.

1. La variation envisagée de x est $\Delta x = 1,05 - 1 = 0,05$.
2. On calcule la vraie variation de $f(x)$:
   $\Delta f(x) = \sqrt{1,05} - \sqrt{1} \simeq 1,02469 - 1 = 0,02469$ (avec la calculatrice)
3. On calcule la dérivée de la fonction et sa valeur en $x = 1$: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.
4. On calcule la variation approchée avec la différentielle.
   $dy = f'(1) \times dx \Rightarrow dy = \dfrac{1}{2} \times dx$.
   Pour $dx = \Delta x = 0,05$, on a donc $dy = \dfrac{1}{2} \times 0,05 = \dfrac{0,05}{2} = 0,025$ (sans calculatrice !).
5. L'erreur commise $\varepsilon \simeq 0,025 - 0,02469 = 0,00031$. Soit $1,3\%$ d'erreur.

Approximation de $\sqrt{2}$.

1. La variation envisagée de x est $\Delta x = 2 - 1 = 1$.
2. On calcule de la vraie variation de $f(x)$:
   $\Delta f(x) = \sqrt{2} - \sqrt{1} \simeq 1,41421 - 1 = 0,41421$ (avec la calculatrice).
3. On calcule la dérivée de la fonction et sa valeur en $x = 1$: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f'(1) = \dfrac{1}{2}$ (On remarque que cela ne dépend pas du Δx envisagé).
4. On calcule la variation approchée avec la différentielle.
   $dy = f'(1) \times dx \Rightarrow dy = \dfrac{1}{2} \times dx$.
   Pour $dx = \Delta x = 1$, on a donc $dy = \dfrac{1}{2} \times 1 = 0,5$ (sans calculatrice !).
5. L'erreur commise $\varepsilon = 0,5 - 0,41421 = 0,08579$. Soit 21% d'erreur.

La variation envisagée de x étant plus grande, dans le second cas, l'erreur d'approximation est plus importante.

2 Approximation polynomiale en un point

Afin d'obtenir une meilleure approximation qu'avec une simple différentielle, on peut approximer la fonction, non plus par une fonction affine (équation de la tangente) mais par un polynôme de degré 2 ou plus. Chercher un développement limité (DL, par la suite) d'une fonction $f(x)$ au voisinage d'un point a, c'est chercher un polynôme (fonction simple) qui, au voisinage de a, se comporte comme $f(x)$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et x_0 un point de I (donc f est définie en x_0).

Une fonction f admet un développement limité d'ordre n en x_0 s'il existe des réels, a_0, a_1,..., a_n, et une fonction $\varepsilon(x)$ tels que :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n}_{partie\ polynomiale\ (approximation\ de\ f)} + \underbrace{(x - x_0)^n \times \varepsilon(x - x_0)}_{reste\ (erreur\ d'approximation)}$$

où $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$

On a réécrit la fonction $f(x)$ comme la somme d'une fonction polynomiale, appelée partie régulière, et d'un reste qui tend vers 0 quand $x \to x_0$. Le reste du DL correspond alors à "l'erreur commise".

Pour trouver les DL des fonctions, c'est-à-dire trouver les valeurs des réels $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ (coefficients des monômes), il existe différentes formules (Mac Laurin, Taylor-Young, Taylor-Laplace). Ces formules se distinguent les unes des autres par des conditions d'applications plus ou moins restrictives et par la précision du reste. Pour ce cours, nous utiliserons la **formule de Taylor-Young**.

Cette formule utilise une notation mathématiques appelée "factorielle".

Définition et propriétés de la factorielle.

En mathématiques la factorielle d'un nombre entier n est le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$.

a) Par convention : $0! = 1$ b) $n \times (n-1)! = n!$ c) $\dfrac{n!}{(n-1)!} = n$

Exemple 134 : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. On remarque que $5 \times 4! = 5! = 120$.
$\dfrac{50!}{48!}$. Avant d'effectuer ce calcul à la calculatrice, il faut penser à simplifier : $\dfrac{50!}{48!} = \dfrac{50 \times 49 \times 48!}{48!} = 50 \times 49$.

Formule de Taylor-Young

Si $f(x)$ est n fois dérivable sur I et sa dérivée n^{ieme} est continue sur I, alors $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 \in I$, on peut écrire :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} \times f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \times f''(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \times f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \times \varepsilon(x - x_0)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$.

On a donc $f(x) \simeq f(x_0) + \dfrac{x - x_0}{1!} \times f'(x_0) + \dfrac{(x-x_0)^2}{2!} \times f''(x_0) + ... + \dfrac{(x-x_0)^n}{n!} \times f^{(n)}(x_0)$. La partie polynomiale du DL donne une approximation de la fonction $f(\cdot)$ au voisinage de x_0. L'erreur de cette approximation est $(x-x_0)^n \times \varepsilon(x - x_0)$.

Remarques :

1. Cette formule permet l'approximation d'une fonction plusieurs fois dérivables au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent des dérivées de la fonction en ce point.
2. Si f admet un développement limité de Taylor-Young à l'ordre n en x_0, celui-ci est unique.
3. La formule de Taylor-Young ne s'applique pas en $+\infty$.
4. Le DL de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 0$ n'existe pas. En effet, en $x = 0$ la fonction n'est pas définie.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 1

$f(x) = f(x_0) + \dfrac{x - x_0}{1!} \times f'(x_0) + (x - x_0) \times \varepsilon(x - x_0)$ *avec* $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$. La partie polynomiale du DL donne une approximation de la valeur de $f(x)$ au voisinage de x_0, ce que l'on peut écrire : $f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0) \times f'(x_0)$. On reconnait l'équation de la tangente en $x = x_0$. Par conséquent, **la partie régulière d'un DL à l'ordre 1 est une approximation affine** de la fonction par sa tangente au voisinage du point considéré, ici $x = x_0$.

Plus l'ordre du développement limité est élevé plus l'approximation de la fonction par sa partie polynomiale donne une approximation précise de la valeur de la fonction au voisinage du point considéré.

Exemple 135 : Appliquons successivement la formule de Taylor-Young à l'**ordre 1**, à l'**ordre 2** puis à l'**ordre 3** en $x_0 = 1$ à la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.

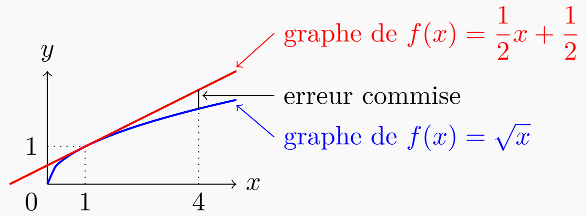
La fonction racine carrée est définie et dérivable trois fois en $x_0 = 1$ et on a :

$$\begin{array}{cccc} f(x) = \sqrt{x} & f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & f''(x) = \dfrac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}} & f'''(x) = \dfrac{3}{8x^{\frac{5}{2}}} \\ f(1) = 1 & f'(1) = \frac{1}{2} & f''(1) = \frac{-1}{4} & f'''(1) = \frac{3}{8} \end{array}$$

<u>A l'ordre 1</u> : $f(x) = f(1) + (x-1) \times f'(1) + (x-1) \times \varepsilon(x-1)$ avec $\lim\limits_{x \to 1} \varepsilon(x-1) = 0$

On en déduit le DL à l'odre 1 de la fonction racine carrée : $f(x) = 1 + (x-1) \times \dfrac{1}{2} + (x-1) \times \varepsilon(x-1)$

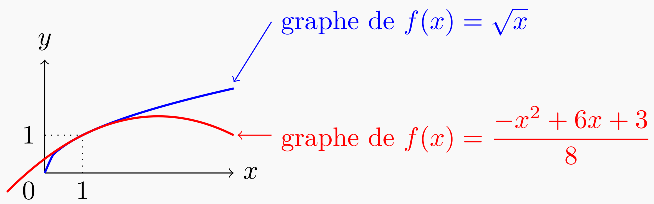
Soit $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} + (x-1) \times \varepsilon(x-1)$. D'où $f(x) \simeq \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$



<u>A l'ordre 2</u> : $f(x) = f(1) + (x-1) \times f'(1) + \dfrac{(x-1)^2}{2!} \times f''(1) + (x-1) \times \varepsilon(x-1)$ avec $\lim\limits_{x \to 1} \varepsilon(x-1) = 0$

On en déduit le DL à l'odre 2 de la fonction racine carrée : $f(x) = 1 + (x-1) \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{(x-1)^2}{2} \times \dfrac{-1}{4} + (x-1) \times \varepsilon(x-1)$

Soit $f(x) = \dfrac{-x^2 + 6x + 3}{8} + (x-1) \times \varepsilon(x-1)$. D'où $f(x) \simeq \dfrac{-x^2 + 6x + 3}{8}$



<u>A l'ordre 3</u> : $f(x) = f(1) + (x-1) \times f'(1) + \dfrac{(x-1)^2}{2!} \times f''(1) + \dfrac{(x-1)^3}{3!} \times f'''(1) + (x-1) \times \varepsilon(x-1)$ avec $\lim\limits_{x \to 1} \varepsilon(x-1) = 0$

On en déduit le DL à l'odre 3 de la fonction racine carrée : $f(x) = 1 + (x-1) \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{(x-1)^2}{2} \times \dfrac{-1}{4} + \dfrac{(x-1)^3}{6} \times \dfrac{3}{8} + (x-1) \times \varepsilon(x-1)$

Soit $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 15x + 5}{16} + (x-1) \times \varepsilon(x-1)$. D'où $f(x) \simeq \dfrac{x^3 - 5x^2 + 15x + 5}{16}$