La fonction de type Cobb-Douglas

1. Introduction

La fonction Cobb-Douglas[1] est une fonction utilisée dans les modèles économiques. C'est une **fonction à deux variables** de $R^+ \times R^+$ dans R^+ définie par :

$f(x, y) = A \times x^{\alpha} \times y^{\beta}$ où A, α et β sont des paramètres strictement positifs.

En économie, la fonction de type Cobb-Douglas est utilisée :

- Soit comme fonction de production. Dans ce cas, elle s'écrit
  - En microéconomie : $q = f(q_1, q_2) = A \times q_1^{\alpha} \times q_2^{\beta}$. Elle exprime un ensemble de techniques de production propre à une entreprise en combinant des inputs (1) et (2) en quantités q_1 et q_2 respectivement, pour obtenir une certaine quantité d'output (volume de production) (q).
  - En macroéconomie : $Y = F(L, K) = A \times L^{\alpha} \times K^{\beta}$. Elle exprime un ensemble de techniques de production propre à une entreprise en combinant du travail et du capital en quantités L et K respectivement, pour obtenir une certaine quantité de produit Y.
- Soit comme fonction d'utilité pour le consommateur. Dans ce cas, elle s'écrit $U(q_1, q_2) = q_1^{\alpha} \times q_2^{\beta}$, où q_1 et q_2 représentent respectivement les quantités des biens (1) et (2). Les résultats mathématiques seront identiques mais les interprétations seront différentes car la fonction de production est cardinale alors que la fonction d'utilité est ordinale (cf. cours de microéconomie).

La fonction telle qu'elle a été estimée par M. Cobb et P. Douglas dans leur article de 1928 est la fonction de production suivante : $F(L, K) = 1{,}01 \times L^{0{,}75} \times K^{0{,}25}$.

2. Continuité

Les fonctions de type Cobb-Douglas sont continues sur leur ensemble de définition.

3. Les courbes de niveau : isoquantes ou courbes d'indifférence

Pour représenter graphiquement cette fonction, on utilise une courbe de niveau appelée **isoquante** (dans le cas d'une fonction de production) ou **courbe d'indifférence** (dans le cas d'une fonction d'utilité). Elle représente l'ensemble des couples (x, y) qui permettent d'atteindre un même niveau de production (production) ou de satisfaction (utilité) : c. Son équation est donc :

$$f(x, y) = c.$$

Equation de la courbe de niveau c dans le repère $(0, x, y)$

Dans le repère $(0, x, y)$ c'est-à-dire avec x en abscisse et y en ordonnée (voir graphique plus bas), il faut exprimer y en fonction de x.

De : $f(x, y) = c,$

on déduit : $A \times x^{\alpha} \times y^{\beta} = c,$

[1] C. Cobb et P. Douglas, 1928, "A Theory of Production", *American Economic Review*, vol. XVIII

ce qui donne : $y^{\beta} = \frac{c}{A} \times \frac{1}{x^{\alpha}}$,

autrement dit : $y = \left(\frac{c}{A} \times \frac{1}{x^{\alpha}}\right)^{1/\beta} = \left(\frac{c}{A}\right)^{1/\beta} \times \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$.

On obtient ainsi finalement :

$$y = k \times x^{-\alpha/\beta} \text{ avec } k = \left(\frac{c}{A}\right)^{1/\beta}, k \text{ est donc une constante strictement positive.}$$

Les courbes de niveau d'une fonction de type Cobb-Douglas (appelées isoquantes ou courbes d'indifférence, selon) ont donc une équation de la forme :

$$y = k \times x^{-\alpha/\beta}$$

Autrement dit, elles sont le graphe de fonctions de la forme :

$$\boldsymbol{i(x) = k \times x^{-\alpha/\beta}} \ (k > 0).$$

Cette fonction – qui est le produit d'une constante par une fonction puissance – est **continue**.

Sens de variation de la fonction $i(\cdot)$

Il est donné par le signe de la dérivée première de la fonction $i(\cdot)$.

Or on a : $i'(x) = k \times \frac{-\alpha}{\beta} \times x^{\frac{-\alpha}{\beta}-1} < 0$ puisque k, α et β sont strictement positifs.

La fonction $i(\cdot)$ et donc les courbes de niveau sont donc **strictement décroissantes** (monotones).

Concavité/convexité de la fonction $i(\cdot)$

Elle est donnée par le signe de sa dérivée seconde.

Or on a : $i''(x) = k \times \frac{-\alpha}{\beta} \times \left(\frac{-\alpha}{\beta} - 1\right) \times x^{\frac{-\alpha}{\beta}-2} = k \times \frac{\alpha}{\beta} \times \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) \times x^{\frac{-\alpha}{\beta}-2} > 0$ puisque k, α et β sont strictement positifs.

La fonction $i(\cdot)$ et donc les courbes de niveau sont donc **strictement convexes**.

Limites de la fonction $i(\cdot)$ quand $x \to 0^+$ ou $x \to +\infty$?

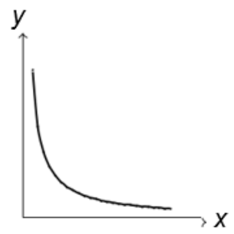
Comme $k > 0, \alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a :

$$i(x) = k \times x^{-\alpha/\beta} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty \quad \text{et} \quad i(x) = k \times x^{-\alpha/\beta} \xrightarrow[q_1 \to +\infty]{} 0^+.$$

Les courbes de niveaux sont donc **asymptotes aux axes** (droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$).

En résumé, *les courbes de niveau des fonctions de type Cobb-Douglas sont* ***continues, décroissantes, convexes et asymtotes aux axes*** *(voir graphe ci-dessous) : ce sont des hyperboles (voir graphique ci-contre)*

Les isoquantes sont des hyperboles.



4. Calculs et interprétation des dérivées partielles premières d'une fonction de production de type Cobb-Douglas : les productivités marginales

Soit la fonction de production : $q = f(q_1, q_2) = A \times q_1^{\alpha} \times q_2^{\beta}$

Productivité marginale de l'input (1)

La dérivée partielle première de $f(\cdot)$ par rapport à q_1 est :

$$f'_{q_1}(q_1, q_2) = \alpha A q_1^{\alpha-1} q_2^{\beta}.$$

Elle exprime la variation tendancielle de la quantité produite suite à une variation infinitésimale de l'input (1), la quantité utilisée de l'input (2) restant constante. C'est une approximation de l'augmentation de la quantité d'output produite consécutivement à l'augmentation d'une unité de l'input (1), la quantité utilisée de l'input (2) étant constante. C'est ce que l'on appelle la **productivité marginale de l'input (1)**, notée $Pm1$.

Remarque : $f'_{q_1}(q_1, q_2) = \alpha A q_1^{\alpha-1} q_2^{\beta} = \alpha \frac{A q_1^{\alpha} q_2^{\beta}}{q_1} = \alpha \frac{f(q_1, q_2)}{q_1} = \alpha \frac{q}{q_1}$. Il s'ensuit que l'élasticité de $f(\cdot)$ par rapport à la quantité d'input (1) – $f'_{q_1}(q_1, q_2) / \frac{q}{q_1}$ – est égale à α.

Comment évolue la productivité marginale de l'input (1) ?

$Pm1 = f'_{q_1}(q_1, q_2) = \alpha A q_1^{\alpha-1} q_2^{\beta}$. Tous les termes de cette expression étant positif, on a : $f'_{q_1}(q_1, q_2) > 0$. **La productivité marginale de l'input (1) est strictement positive** : une augmentation infinitésimale de l'input (1), la quantité utilisée d'input (2) étant constante, accroit, en tendance, la quantité produite de $\alpha A q_1^{\alpha-1} q_2^{\beta}$.

Notons que la productivité marginale de l'input (1), $Pm1$, est une fonction de deux variables. Ce que l'on peut écrire : $Pm1(q_1, q_2) = \alpha A q_1^{\alpha-1} q_2^{\beta}$.

Pour savoir si cette productivité marginale est **croissante ou décroissante**, il faut connaître le signe de sa dérivée par rapport à q_1.

Or on a : $Pm1'_{q_1}(q_1, q_2) = \alpha(\alpha - 1) A q_1^{\alpha-2} q_2^{\beta}$.

Cette expression étant du signe de $\alpha - 1$, la productivité marginale de l'input (1) est **croissante si $\alpha > 1$**, **décroissante si $\alpha < 1$** et **constante si $\alpha = 1$**.

Productivité marginale de l'input (2)

De la même façon, la dérivée partielle première de $f(\cdot)$ par rapport à q_2 :

$$f'_{q_2}(q_1, q_2) = \beta A q_1^{\alpha} q_2^{\beta-1}$$

est une approximation de l'augmentation de la quantité d'output produite consécutivement à l'augmentation d'une unité de l'input (2), la quantité utilisée de l'input (1) étant constante. C'est ce que l'on appelle la **productivité marginale de l'input (2)**, notée $Pm2$.

Remarque : $f'_{q_2}(q_1, q_2) = \beta \frac{f(q_1, q_2)}{q_2} = \beta \frac{q}{q_2}$. Il s'ensuit que l'élasticité de $f(\cdot)$ par rapport à la quantité d'input (2) – $f'_{q_2}(q_1, q_2) / \frac{q}{q_2}$ – est égale à β.

Comment évolue la productivité marginale de l'input (2) ?

$Pm2 = f'_{q_2}(q_1, q_2) = \beta A q_1^{\alpha} q_2^{\beta-1} > 0$. Tout comme celle de l'input (1), **la productivité marginale de l'input (2) est strictement positive**.

Notons que la productivité marginale de l'input (2), $Pm2$, est une fonction de deux variables. Ce que l'on peut écrire : $Pm2(q_1, q_2) = \beta A q_1^{\alpha} q_2^{\beta-1}$.

Pour savoir si cette productivité marginale est **croissante ou décroissante**, il faut connaître le signe de sa dérivée par rapport à q_2.

$Pm2'_{q_2}(q_1, q_2) = \beta(\beta - 1) A q_1^{\alpha} q_2^{\beta-2}$.

Cette expression étant du signe de $\beta - 1$, la productivité marginale de l'input (2) est **croissante si $\beta > 1$**, **décroissante si $\beta < 1$** et **constante si $\beta = 1$**.

5. La fonction de type Cobb-Douglas, une fonction homogène de degré *k*

On dit qu'une fonction $f(\cdot)$ est **homogène de degré *k*** si et seulement si, pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$f(\lambda q_1, \lambda q_2) = \lambda^k f(q_1, q_2).$$

Soit la fonction de type Cobb-Douglas : $f(x, y) = A \times x^{\alpha} \times y^{\beta}$.

On a alors :

$f(\lambda q_1, \lambda q_2) = A(\lambda q_1)^{\alpha}(\lambda q_1)^{\beta} = A\lambda^{\alpha} q_1^{\alpha} \lambda^{\beta} q_2^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} A q_1^{\alpha} q_2^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} f(q_1, q_2)$.

La fonction de type Cobb-Douglas est donc **homogène de degré $\alpha + \beta$**.

Interprétation dans le cas d'une fonction de production.

Soit la fonction de production de type Cobb-Douglas, définie par $q = f(q_1, q_2) = A \times q_1^{\alpha} \times q_2^{\beta}$, est donc homogène de degré $\alpha + \beta$. Ceci signifie que, lorsque l'on multiplie le panier d'inputs par $\lambda > 1$, alors la quantité d'output produite est multipliée par $\lambda^{\alpha+\beta}$. Elle augmente donc :

- Plus que proportionnellement si $\alpha + \beta > 1$, puisqu'alors $\lambda^{\alpha+\beta} > \lambda$. On dit que les rendements d'échelle sont croissants.
- Moins que proportionnellement si $\alpha + \beta < 1$, puisqu'alors $\lambda^{\alpha+\beta} < \lambda$. On dit que les rendements d'échelle sont décroissants.
- Proportionnellement si $\alpha + \beta = 1$, puisqu'alors $\lambda^{\alpha+\beta} = \lambda$. On dit que les rendements d'échelle sont constants.