Université Paris 1
L1 MIASHS
Algèbre linéaire
Année 2023-2024

Contrôle continu 1

Durée : 1h.

Expliquez les étapes du raisonnement et des calculs, même s'ils n'ont pas abouti.

Bon courage !

Question de cours

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E. A quelle condition dit-on que F et G sont supplémentaires ?

Exercice 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère le système à paramètre :

$$(S_\alpha)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & \alpha z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & \alpha^2 z & = & \alpha+1 \end{array}\right.$$

1. Donner, en fonction de α, l'ensemble des solutions du système (S_α).
2. L'ensemble des solutions :

   $$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=2,\ x+2y+\alpha z=1,\ x+2y+\alpha^2 z=\alpha+1\right\}$$

   est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \\ 1 & 2 & \alpha^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$$

1. Donner la trace et la transposée de A.
2. Dans cette question, on suppose que $\boxed{\alpha \neq 0 \text{ et } \alpha \neq 1}$. Calculer l'inverse de A.
3. Dans cette question, on suppose que $\boxed{\alpha = 0}$. Calculer AC.

   En déduire que, si A était inversible pour $\alpha = 0$, on aurait $(-2,1,1) = (0,0,0)$ (et donc, que A n'est pas inversible pour $\alpha = 0$).
4. Dans cette question, on suppose que $\boxed{\alpha = 1}$. Calculer LA.

   En déduire que, si A était inversible pour $\alpha = 1$, on aurait $(0,-1,1) = (0,0,0)$ (et donc, que A n'est pas inversible pour $\alpha = 1$).