Algèbre Linéaire 1 - CC du 28 février

Question de cours

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E. A quelle condition dit-on que F et G sont supplémentaires ?

$F, G \subset E$ deux sous espaces vectoriels de E

On dit que F et G sont supplémentaires (et on note $\boxed{E = F \oplus G}$)

si ① $F \cap G = \{0_E\}$

et ② $F + G = E$

avec $F + G = \{u \in E \mid \exists v \in F, \exists w \in G \text{ tq } u = v + w\}$

Rem Si F et G sont des s.e.v, $F \cap G$ est toujours un s.e.v

Exercice 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère le système à paramètre :

$$(S_\alpha)\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + \alpha z = 1 \\ x + 2y + \alpha^2 z = \alpha + 1 \end{cases}$$

1. Donner, en fonction de α, l'ensemble des solutions du système (S_α).

$$(S_\alpha)\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + \alpha z = 1 \\ x + 2y + \alpha^2 z = \alpha + 1 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + (\alpha-1)z = -1 \\ y + (\alpha^2-1)z = \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + (\alpha-1)z = -1 \\ (\alpha^2 - 1 - (\alpha - 1))z = \alpha \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + (\alpha-1)z = -1 \\ (\alpha^2 - \alpha)z = \alpha \end{cases}$$ échelonné !

$\alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha - 1) = 0$ ssi $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$

$\rightarrow$ On sépare 3 cas : $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, ($\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$)

$\boxed{\alpha=0}$ $\quad S_0 \iff \begin{cases} x+y+z=2 \\ y-z=-1 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2-(z-1)-z=3-2z \\ y=z-1 \end{cases}$

x, y inconnues principales
z inconnue libre

$\rightarrow$ S_0 a une infinité de solutions : l'ensemble des solutions est $\{(3-2z, z-1, z), z\in\mathbb{R}\}$

$\boxed{\alpha=1}$ $\quad (S_1) \iff \begin{cases} x+y+z=2 \\ y=-1 \\ 0=1 \end{cases}$ contradiction

$\rightarrow$ S_1 n'a pas de solutions : l'ensemble des solutions est $\emptyset$

$\boxed{\alpha\neq 0,1}$ $\quad (S_\alpha) \iff \begin{cases} x+y+z=2 \\ y+(\alpha-1)z=-1 \\ z=\dfrac{\alpha}{\alpha(\alpha-1)}=\dfrac{1}{\alpha-1} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=2-(-2)-\dfrac{1}{\alpha-1}=4-\dfrac{1}{\alpha-1} \\ y=-1-(\alpha-1)\dfrac{1}{\alpha-1}=-2 \\ z=\dfrac{1}{\alpha-1} \end{cases}$

Pour $\alpha\neq 0$ et $\alpha\neq 1$, (S_α) a une unique solution $\left(4-\frac{1}{\alpha-1}, -2, \frac{1}{\alpha-1}\right)$
L'ensemble des solutions est $\left\{\left(4-\frac{1}{\alpha-1}, -2, \frac{1}{\alpha-1}\right)\right\}$

⚠ On n'obtient pas une infinité de solution
$\left\{\left(4-\frac{1}{\alpha-1}, -2, \frac{1}{\alpha-1}\right), \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\right\}$

$\rightarrow$ Pour chaque valeur de α, on a un système différent, et (si $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 1$)
chacun de ces systèmes a une unique solution
Par exemple, (S_2) est un système dont l'unique solution est $(3,-2,1)$
(S_{-1}) est un autre système dont l'unique solution est
$\left(4+\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}\right)$
Mais $(3,-2,1)$ n'est pas solution de (S_{-1})
et $\left(4+\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}\right)$ n'est pas solution de (S_2)

2. L'ensemble des solutions :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 2, x + 2y + \alpha z = 1, x + 2y + \alpha^2 z = \alpha + 1\}$$

est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Si F était un s.e.v de $\mathbb{R}^3$, on aurait $0_{\mathbb{R}^3} \in F$

Mais $0+0+0 = 0 \neq 2$

$\rightarrow$ $0_{\mathbb{R}^3}$ ne vérifie pas l'une des équations de F, donc $0_{\mathbb{R}^3} \notin F$

et donc F n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$

Rq Si $\alpha = -1$, $(0,0,0)$ vérifie $0 + 2.0 + (-1)^2.0 = 0$

mais ça ne suffit pas : pour que $(0,0,0) \in F$, il faut que F vérifie les $\underline{3}$ équations. Cet a n'est pas le cas).

Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \\ 1 & 2 & \alpha^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \ C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$$

1. Donner la trace et la transposée de A.

$$\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2 + \alpha^2 = 3 + \alpha^2$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

2. Dans cette question, on suppose que $\boxed{\alpha \neq 0 \text{ et } \alpha \neq 1}$. Calculer l'inverse de A.

$$\begin{array}{c} A \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha^2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} I_3 \\ \\ \end{array}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \ L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha - 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^2 - 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\alpha^2 - 1 - (\alpha - 1) = \alpha^2 - \alpha$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha - 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - \alpha & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 \times \frac{1}{\alpha^2 - \alpha}$ (OK car $\alpha \neq 0, 1$)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha - 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3, \ L_2 \leftarrow L_2 - (\alpha - 1) L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{-1}{\alpha(\alpha-1)} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 + \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\begin{array}{c} \\ I_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} - \frac{\alpha+1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{\alpha+1}{\alpha} & -\cancel{\frac{1}{\alpha}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ A^{-1} \\ \\ \end{array}$$

Simplification de la première ligne : $\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} - \frac{\alpha+1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} - \frac{(\alpha+1)(\alpha-1)}{\alpha(\alpha-1)} = \frac{1-(\alpha^2-1)}{\alpha(\alpha-1)} = \boxed{\frac{2-\alpha^2}{\alpha(\alpha-1)}}$, $-\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha} = \frac{-1}{\alpha(\alpha-1)} + \frac{\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)} = \boxed{\frac{\alpha-2}{\alpha(\alpha-1)}}$

On obtient $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2-\alpha^2}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{\alpha-2}{\alpha(\alpha-1)} \\ -1 & \frac{\alpha+1}{\alpha} & -1/\alpha \\ 0 & -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \end{pmatrix}}$

3. Dans cette question, on suppose que $\boxed{\alpha = 0}$. Calculer AC.
En déduire que, si A était inversible pour $\alpha = 0$, on aurait $(-2, 1, 1) = (0, 0, 0)$ (et donc, que A n'est pas inversible pour $\alpha = 0$).

$$AC = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \\ 1 & 2 & \alpha^2 \end{pmatrix}}_{3\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.(-2) + 1.1 + 1.1 \\ 1.(-2) + 2.1 + \alpha.1 \\ 1.(-2) + 2.1 + \alpha^2.1 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Pour $\alpha = 0$, $AC = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Supposons, par l'absurde, que pour $\alpha = 0$, A est inversible. Alors
$AC = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A^{-1}AC = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Donc $I_3 . C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Mais $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ contradiction

Pour $\alpha = 0$, A n'est pas inversible

4. Dans cette question, on suppose que $\boxed{\alpha = 1}$. Calculer LA.
En déduire que, si A était inversible pour $\alpha = 1$, on aurait $(0, -1, 1) = (0, 0, 0)$ (et donc, que A n'est pas inversible pour $\alpha = 1$).

- $LA = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{1\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \\ 1 & 2 & \alpha^2 \end{pmatrix}}_{3\times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.1 + (-1).1 + 1.1 & 0.1 + (-1).2 + 1.2 & 0.1 + (-1)\alpha + 1.\alpha^2 \end{pmatrix}}_{1\times 3}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha + \alpha^2 \end{pmatrix}$

Donc, si $\alpha = 1$, $LA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Supposons, par l'absurde, que A soit inversible pour $\alpha = 1$. Alors
$LA = (0 . 0 \;\; 0)$ donne $LAA^{-1} = (0 \; 0 \; 0) A^{-1}$ donc $LI_3 = (0 \; 0 0)$
Donc $L = (0 \; 0 0)$ Mais $L = (0 \; -1 \; 1) \neq (0 \; 0 0)$: contradiction

Pour $\alpha = 1$, A n'est pas inversible