

EXERCICES SUP Mathématiques - L1

Semestre 2

2023-2024

Exercice 1 : Écrire les ensembles suivants en extension.

1) $B = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$

2) $E = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 5 > 0\}$

Exercice 2 : Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 > 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Montrer que les ensembles A^c , B^c , $A \cup B$ et $A \cap B$ sont des intervalles ou des réunions d'intervalles et préciser lesquels.

Exercice 3 : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{4x + 5}{x^2 - 25}$

5) $j(x) = f(x) \times g(x)$

2) $g(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$

6) $l(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

3) $h(x) = f(x) + g(x)$

7) $m(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

4) $i(x) = f(x) - g(x)$.

Exercice 4 : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $g(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$

2) $i_k = \sqrt{2x - k}$

3) $j_k = \frac{x - k}{x + k}$

Exercice 5 : Exercice de synthèse : Domaine de définition, limites et asymptotes.

Soit la fonction $f_k(x) = \frac{kx^3 - 3}{x^2 + 2}$ avec $k > 0$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(\cdot)$ en justifiant précisément votre réponse.
- 2) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition. Préciser, au besoin, les formes indéterminées et justifier votre démarche.
- 3) Indiquer si la fonction admet une ou plusieurs asymptotes et si tel est le cas, donner sa (ou leur) équation.
- 4) Indiquer la position en $+\infty$ et $-\infty$ du graphe de la fonction par rapport à son asymptote.

Exercice 6 : Calculer, si elles existent, les limites ci-dessous.

1) $\lim_{x \rightarrow 1} (4x^3 + 2x^2 + 100000)$

12) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2x - 3}{x - 1} \right)$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 + 2x^2 + 100000)$.

13) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{5}{4 - x^2} \right)$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} (4x^3 + 2x^2 + 100000)$

14) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5}{4 - x^2} \right)$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d)$ avec $a > 0$

15) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x - a}$ avec $a \in \mathbb{R}^+$

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d)$ avec $a > 0$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d)$ avec $a < 0$

7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d)$ avec $a < 0$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

16) $\lim_{x \rightarrow -4} (\sqrt{x + 4})$

9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4}$

17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 4})$

10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3}$

18) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x + 4})$

11) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x - 3}{x - 1} \right)$

19) $\lim_{x \rightarrow -a} (\sqrt{x + a})$

20) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((3x - 4)(x - 7))$

Exercice 7 : Soit la fonction $f(x) = (1+x)^n - 1 - nx$ avec $n \in \mathbb{N}$. Utiliser les équivalents afin de calculer les limites suivantes en discutant selon les valeurs de n :

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} ((1+x)^n - 1 - nx)$ avec $n = 0$ et 1. 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((1+x)^n - 1 - nx)$ avec $n \geq 2$.
 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((1+x)^n - 1 - nx)$ avec $n \geq 2$. 4) $\lim_{x \rightarrow 0} ((1+x)^n - 1 - nx)$ avec $n \geq 2$.

Exercice 8 : Déterminer le domaine de définition et calculer les limites aux bornes du domaine de définition des fonctions suivantes :

- 1) $h(x) = \frac{5x-3}{x-2}$. 2) $l(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x+12}$.

Exercice 9 : Après avoir identifié la forme indéterminée, vous déterminerez un équivalent et calculerez les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x}{x+4} \right)$ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2-7}}{3x+5} \right)$
 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x}{x+4} \right)$ 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 + 2x^2 - 10000)$
 3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x-4}$

Exercice 10 : Calculer les limites, si elles existent, des fonctions suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \infty - \infty$ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x(x+1)} \right)$
 2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x(x+1)} \right)$
 3) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{a}} \frac{x^2-a}{x-\sqrt{a}}$ avec $a > 0$ 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x(x+1)} \right)$

Exercice 11 : Pour chacune des fonctions ci-dessous, vous déterminerez les équations des éventuelles asymptotes.

- 1) $f(x) = \sqrt{x+6}$ 4) $g(x) = \frac{ax^2+b}{cx^2+d}$ avec $a \neq d$
 2) $l(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x+12}$
 3) $f(x) = x^2+4$ 5) $l(x) = \frac{a}{bx}$