EXERCICES SUP Mathématiques - L1

Semestre 2

2023-2024

Exercice 1 : Écrire les ensembles suivants en extension.

1) $B = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\}$

2) $E = \left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4x + 5 > 0\right\}$

CORRECTION

1) $B = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\} \Rightarrow B =]-\infty; 0]$

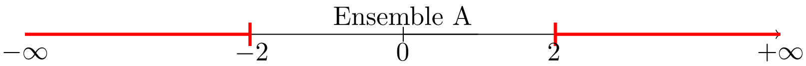
2) $E = \left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4x + 5 > 0\right\}$. On calcule le discriminant afin de déterminer les racines et écrire l'expression sous la forme d'un produit de facteur.
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$ donc l'expression est toujours du signe "a" cad positive. Par conséquent $E = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

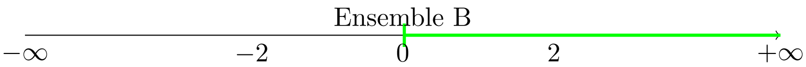
Exercice 2 : Soit $A = \left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4 > 0\right\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$. Montrer que les ensembles A^c, B^c, $A \cup B$ et $A \cap B$ sont des intervalles ou des réunions d'intervalles et préciser lesquels.

CORRECTION

$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) > 0$ donc $\left\{\begin{array}{ll} x-2 & > 0 \\ x+2 & > 0 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ll} x-2 & < 0 \\ x+2 & < 0 \end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{ll} x & > 2 \\ x & < -2 \end{array}\right.$

$A =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ et $B =]0, +\infty[$
Autre manière pour déterminer explicitement l'ensemble A : $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4$ donc $x > \sqrt{4} = 2$ ou $x < -\sqrt{4} = -2$.





$A^c = [-2, 2]$; $B^c =]-\infty, 0]$; $A \cap B =]0, 2[$; $A \cup B =]-\infty, -2[\cup \mathbb{R}_+^*$

Exercice 3 : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{4x+5}{x^2-25}$

2) $g(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$

3) $h(x) = f(x) + g(x)$

4) $i(x) = f(x) - g(x)$.

5) $j(x) = f(x) \times g(x)$

6) $l(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

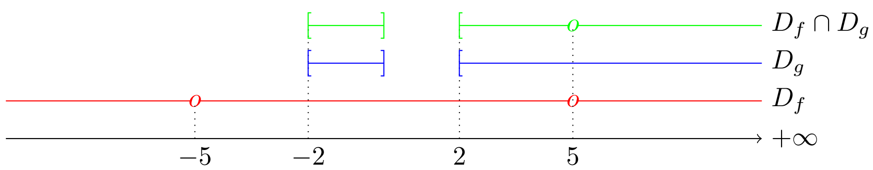
7) $m(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$

CORRECTION

1) $f(x) = \dfrac{4x+5}{x^2-25}$ est définie si $x^2 - 25 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 25 \Rightarrow x \neq \pm 5$. Identité remarquable : $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x-5)(x+5)$. Donc $D_f =]-\infty; -5[\cup]-5; 5[\cup]5; +\infty[$.

2) $g(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$. La fonction est définie quand $x^3 - 4x \geq 0$ soit $x(x^2 - 4) \geq 0$ donc $D_g =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$.

3) $h(x) = f(x) + g(x)$. Alors, $h(x) = \dfrac{4x+5}{x^2-25} + \sqrt{x^3 - 4x}$.
Pour faire comprendre $D_h = D_f \cap D_g$, on peut utiliser la représentation graphique de la droite réelle :



Avec $D_h = D_f \cap D_g = [-2;0] \cup [2;5[\cup]5;+\infty[$

4) $i(x) = f(x) - g(x)$. Alors $i(x) = \dfrac{4x+5}{x^2-25} - \sqrt{x^3-4x}$. Avec $D_i = D_f \cap D_g = [-2;0] \cup [2;5[\cup]5;+\infty[$

5) $j(x) = f(x) \times g(x)$ Alors $j(x) = \dfrac{4x+5}{x^2-25} \times \sqrt{x^3-4x}$. Avec $D_j = D_f \cap D_g = [-2;0] \cup [2;5[\cup]5;+\infty[$

6) $l(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Alors $l(x) = \dfrac{\frac{4x+5}{x^2-25}}{\sqrt{x^3-4x}} = \dfrac{4x+5}{(x^2-25)(\sqrt{x^3-4x})}$.
Une condition change. Désormais : $x^3 - 4x > 0 \Rightarrow x > 2$ *ou* $x < -2$.
Donc $D_l =]-2;0[\cup]2;5[\cup]5;+\infty[$

7) $m(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ alors $m(x) = \dfrac{\sqrt{x^3-4x}}{\frac{4x+5}{x^2-25}}$. Il y a désormais trois conditions sur x :

$$\left\{\begin{array}{c} x^3-4x \geq 0 \\ 4x+5 \neq 0 \\ x^2-25 \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x \in [-2;0] \cup [2;+\infty[\\ x \neq \dfrac{-5}{4} \\ x \neq 5 \ et \ x \neq -5 \end{array}\right.$$

Donc $D_m = \left[-2; \frac{-5}{4}\right[\cup \left]\frac{-5}{4};0\right] \cup [2;5[\cup]5;+\infty[$

Exercice 4 : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $g(x) = \sqrt{x^3-4x}$ 2) $i_k = \sqrt{2x-k}$ 3) $j_k = \dfrac{x-k}{x+k}$

CORRECTION

1) $g(x) = \sqrt{x^3-4x}$ est définie si $x^3 - 4x \geq 0 \Rightarrow x\left(x^2-4\right) \geq 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) \geq 0$. On peut faire un tableau de signes d'où $D_g = [-2;0] \cup [2;+\infty[$.

2) La fonction $i_k = \sqrt{2x-k}$ est définie si $2x - k \geq 0$ donc $x \geq \dfrac{k}{2}$ d'où $D_{i_k} = \left[\dfrac{k}{2};+\infty\right[$.
Il peut être souhaitable de faire un exemple avec une valeur quelconque pour le paramètre k afin qu'ils comprennent bien que la variable est x et non k.

3) La fonction $j_k = \dfrac{x-k}{x+k}$ est définie si $x + k \neq 0$ soit $x \neq k$ d'où $D_{j_k} =]-\infty;k[\cup]k;+\infty[$

Exercice 5 : Exercice de synthèse : Domaine de définition, limites et asymptotes.

Soit la fonction $f_k(x) = \dfrac{kx^3-3}{x^2+2}$ avec $k > 0$.

1) **Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(\cdot)$ en justifiant précisément votre réponse.**
$D_f = \mathbb{R}$
2) **Calculer les limites aux bornes du domaine de définition. Préciser, au besoin, les formes indéterminées et justifier votre démarche.**
$\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = -\infty$

3) **Indiquer si la fonction admet une ou plusieurs asymptotes et si tel est le cas, donner sa (ou leur) équation.** Ni AV, ni AH.

4) **Indiquer la position en $+\infty$ et $-\infty$ du graphe de la fonction par rapport à son asymptote.**
Hors programme !

Exercice 6 : Calculer, si elles existent, les limites ci-dessous.

1) $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\left(4x^3+2x^2+100000\right)$
2) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(4x^3+2x^2+100000\right)$.
3) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(4x^3+2x^2+100000\right)$
4) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)$ avec $a>0$
5) $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)$ avec $a>0$
6) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)$ avec $a<0$
7) $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)$ avec $a<0$
8) $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$
9) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^4}$
10) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^3}$
11) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2x-3}{x-1}\right)$
12) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2x-3}{x-1}\right)$
13) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{5}{4-x^2}\right)$
14) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{5}{4-x^2}\right)$
15) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x-a}$ avec $a\in\mathbb{R}^+$
16) $\lim\limits_{x\to -4}\left(\sqrt{x+4}\right)$
17) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+4}\right)$
18) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x+4}\right)$
19) $\lim\limits_{x\to -a}\left(\sqrt{x+a}\right)$
20) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left((3x-4)(x-7)\right)$

CORRECTION

1) $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\left(4x^3+2x^2+100000\right)=4+2+100000=100006=f(1)$.

2) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(4x^3+2x^2+100000\right)$.
On sait que la limite d'une somme est la somme des limites donc $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(4x^3+2x^2+100000\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(4x^3\right)+\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(2x^2\right)+\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}(100000)=+\infty+\infty+100000=+\infty$.

Autre méthode (plus rapide) : Un polynôme se comporte comme son monôme de plus haut degré en $\pm\infty$ donc $4x^3+2x^2+100000\sim_\infty 4x^3$. Ainsi, $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(4x^3+2x^2+100000\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(4x^3\right)=+\infty$.

On peut vérifier l'équivalent en calculant : $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(\dfrac{4x^3+2x^2+100000}{4x^3}\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}1+\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(\dfrac{2x^2}{4x^3}\right)+\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(\dfrac{100000}{4x^3}\right)=1+0+0=1$

3) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(4x^3+2x^2+100000\right)$
On sait que la limite d'une somme est la somme des limites donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(4x^3+2x^2+0,001\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(4x^3\right)+\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(2x^2\right)+\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(0,001)=0+0+0,001=0,001$.

Autre méthode (plus rapide) : Un polynôme se comporte comme son monôme de plus bas degré en 0 donc $4x^3+2x^2+0,001\sim_0 0,001$ d'où $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}0,001=0,001=f(0)$.

4) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)$ avec $a>0$ et $b,c,d<0$.
$\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}ax^3=a\times+\infty=+\infty$

5) $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)$ avec $a>0$ et $b,c,d<0$
$\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}ax^3=a\times-\infty=-\infty$

6) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)$ avec $a < 0$ et $b, c, d < 0$
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} ax^3 = a \times +\infty = -\infty$

7) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)$ avec $a < 0$ et $b, c, d < 0$
$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} ax^3 = a \times -\infty = +\infty$

8) $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) = \sqrt{1^2 + 1} - 1 = \sqrt{2} - 1 = f(1)$

9) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^4} = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+$

10) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{1}{-\infty} = 0^-$

11) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{2x - 3}{x - 1}\right) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

12) $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\dfrac{2x - 3}{x - 1}\right) = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

13) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{5}{4 - x^2}\right) = \dfrac{5}{4 - (-2^2)} = \dfrac{5}{4 - (-2)^2} = \dfrac{5}{0}$. Il faut distinguer deux cas : $x \to -2^+$ et $x \to -2^-$.
$\lim\limits_{x \to -2^+} \left(\dfrac{5}{4 - x^2}\right) = \dfrac{5}{0^-} = -\infty.$
$\lim\limits_{x \to -2^-} \left(\dfrac{5}{4 - x^2}\right) = \dfrac{5}{0^+} = +\infty.$

14) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{5}{4 - x^2}\right) = \dfrac{5}{4 - (2^2)} = \dfrac{5}{0}$. Il faut distinguer deux cas : $x \to 2^+$ et $x \to 2^-$.
$\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{5}{4 - x^2}\right) = \dfrac{5}{0^-} = -\infty.$
$\lim\limits_{x \to 2^-} \left(\dfrac{5}{4 - x^2}\right) = \dfrac{5}{0^+} = +\infty.$

15) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x - a}$ avec $a \in \mathbb{R}^+$
$\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{1}{x - a} = \dfrac{1}{a^- - a} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{1}{x - a} = \dfrac{1}{a^+ - a} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

16) $\lim\limits_{x \to -4} \left(\sqrt{x + 4}\right) = \sqrt{-4 + 4} = \sqrt{0} = 0$

17) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + 4}\right) = +\infty$

18) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x + 4}\right)$. Cette limite n'existe pas car la fonction n'est pas défini en $-\infty$.

19) $\lim\limits_{x \to -a} \left(\sqrt{x + a}\right)$
$\lim\limits_{x \to -a^+} \left(\sqrt{x + a}\right) = 0^+$
$\lim\limits_{x \to -a^-} \left(\sqrt{x + a}\right)$ n'existe pas.

20) $\lim\limits_{x \to +\infty} ((3x - 4)(x - 7)) = +\infty \times +\infty = +\infty$

Exercice 7 : Soit la fonction $f(x) = (1 + x)^n - 1 - nx$ avec $n \in \mathbb{N}$. Utiliser les équivalents afin de calculer les limites suivantes en discutant selon les valeurs de n :

1) $\lim\limits_{x \longrightarrow a} ((1+x)^n - 1 - nx)$ avec $n = 0$ et 1.

2) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} ((1+x)^n - 1 - nx)$ avec $n \geq 2$.

3) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} ((1+x)^n - 1 - nx)$ avec $n \geq 2$.

4) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} ((1+x)^n - 1 - nx)$ avec $n \geq 2$.

CORRECTION

1) $\lim\limits_{x \longrightarrow a} ((1+x)^n - 1 - nx)$ avec $n = 0$ et $n = 1$.
i) Si $n = 0$ alors $(1+x)^0 - 1 - 0 \cdot x = 1 - 1 - 0 = 0$ donc la fonction est constante. Ainsi, $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \big((1+x)^0 - 1 - 0 \cdot x\big) = 0$

ii) Si $n = 1$ alors $(1+x)^1 - 1 - 1 \cdot x = 1 + x - 1 - x = 0$. Idem.

2) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} ((1+x)^n - 1 - nx)$ avec $n \geq 2$.
Si $n \geq 2$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} ((1+x)^n - 1 - nx)$ est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.
Il s'agit d'un polynôme dont l'équivalent en ∞ est son monôme de plus haut degré : $(1+x)^n - 1 - nx \sim_{+\infty} x^n$ d'où $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^n = +\infty$, $\forall n \geq 2$.

3) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} ((1+x)^n - 1 - nx)$ avec $n \geq 2$.
On sait que $(1+x)^n - 1 - nx \sim_{-\infty} x^n$ d'où $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^n = +\infty$ quand n est pair et $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^n = -\infty$ quand n est impair.

4) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} ((1+x)^n - 1 - nx)$ avec $n \geq 2$.
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} ((1+x)^n - 1 - nx) = (1+0)^n - 1 - n \cdot 0 = 1^n - 1 = 0 = f(0)$, $\forall n \geq 2$.

Exercice 8 : Déterminer le domaine de définition et calculer les limites aux bornes du domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $h(x) = \dfrac{5x-3}{x-2}$.

2) $l(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{3x+12}$.

CORRECTION

1) $h(x) = \dfrac{5x-3}{x-2}$.
La fonction $h(x)$ est définie quand le dénominateur est non nul. $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$. On peut écrire $D_h =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ donc 4 limites à calculer : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x)$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} h(x)$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} h(x)$.

- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x)$ est une FI du type $\dfrac{\infty}{\infty}$. On utilise les équivalents : $\dfrac{5x-3}{x-2} \sim_{+\infty} \dfrac{5x}{x} = 5$, (Rappel, on peut multiplier et/ou diviser des équivalents), donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = 5$.
- $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} h(x)$ est une FI du type $\dfrac{\infty}{\infty}$. On utilise les équivalents : $\dfrac{5x-3}{x-2} \sim_{+\infty} \dfrac{5x}{x} = 5$, (Rappel, on peut multiplier et/ou diviser des équivalents), donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = 5$.
- $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} h(x) = \dfrac{7}{0^+} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} h(x) = \dfrac{7}{0^-} = -\infty$.

2) $l(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{3x+12}$. La fonction $l(x)$ est définie quand le dénominateur est non nul et quand la racine est positive ou nulle :
$$\begin{cases} 3x + 12 \neq 0 \\ x^2 - 9 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{-12}{3} \\ x^2 \geq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ -\sqrt{9} \geq x \geq \sqrt{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ -3 \geq x \geq 3 \end{cases}$$
On peut écrire $D_l =]-\infty; -4[\cup]-4; -3] \cup [3; +\infty[$ donc 6 limites à calculer : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} l(x)$,

$\lim_{x\longrightarrow -\infty} l(x)$, $\lim_{x\longrightarrow -4^+} l(x)$, $\lim_{x\longrightarrow -4^+} h(x)$, $\lim_{x\longrightarrow -3^-} l(x)$ et $\lim_{x\longrightarrow 3^+} l(x)$.

- $\lim_{x\longrightarrow +\infty} l(x)$ est une FI du type $\dfrac{\infty}{\infty}$. On utilise les équivalents : $\sqrt{x^2-9} \sim_{+\infty} x$ et $3x+12 \sim_{+\infty} 3x$ donc $l(x) \sim_{+\infty} \dfrac{x}{3x} = \dfrac{1}{3}$ d'où $\lim_{x\longrightarrow +\infty} l(x) = \dfrac{1}{3}$.
- $\lim_{x\longrightarrow -\infty} l(x)$ est une FI du type $\dfrac{\infty}{\infty}$. On utilise les équivalents : $\sqrt{x^2-9} \sim_{-\infty} -x$ et $3x+12 \sim_{-\infty} 3x$ donc $l(x) \sim_{-\infty} \dfrac{-x}{3x} = \dfrac{-1}{3}$ d'où $\lim_{x\longrightarrow -\infty} l(x) = \dfrac{-1}{3}$.
- $\lim_{x\longrightarrow -4^-} l(x) = \dfrac{\sqrt{7}}{0^-} = -\infty$.
- $\lim_{x\longrightarrow -4^+} l(x) = \dfrac{\sqrt{7}}{0^+} = +\infty$.
- $\lim_{x\longrightarrow -3^-} l(x) = \dfrac{0^+}{3} = +\infty$.
- $\lim_{x\longrightarrow 3^+} l(x) = \dfrac{0^+}{21} = +\infty$.

Exercice 9 : Après avoir identifié la forme indéterminée, vous déterminerez un équivalent et calculerez les limites suivantes :

1) $\lim_{x\longrightarrow 0} \left(\dfrac{3x}{x+4}\right)$
2) $\lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\dfrac{3x}{x+4}\right)$
3) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$
4) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^2-7}}{3x+5}\right)$
5) $\lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(4x^3+2x^2-10000\right)$

CORRECTION : Résultat uniquement

6) $\lim_{x\longrightarrow 0} \left(\dfrac{3x}{x+4}\right) = 0$
7) $\lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\dfrac{3x}{x+4}\right) = 3$
8) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4} = 8$
9) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^2-7}}{3x+5}\right) = \dfrac{1}{3}$
10) $\lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(4x^3+2x^2-10000\right) = -\infty$

Exercice 10 : Calculer les limites, si elles existent, des fonctions suivantes :

1) $\lim_{x\longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) =$
2) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$
3) $\lim_{x\to \sqrt{a}} \left(\dfrac{x^2-a}{x-\sqrt{a}}\right)$ avec $a>0$
4) $\lim_{x\longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x(x+1)}\right)$
5) $\lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\dfrac{x^2}{x(x+1)}\right)$
6) $\lim_{x\longrightarrow 0} \left(\dfrac{x^2}{x(x+1)}\right)$

CORRECTION : Résultat uniquement

7) $\lim_{x\longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = 0$
8) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$
9) $\lim_{x\to \sqrt{a}} \dfrac{x^2-a}{x-\sqrt{a}} = 2\sqrt{a}$ avec $a>0$
10) $\lim_{x\longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x(x+1)}\right) = 1$
11) $\lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\dfrac{x^2}{x(x+1)}\right) = 1$
12) $\lim_{x\longrightarrow 0} \left(\dfrac{x^2}{x(x+1)}\right) = 0$

Exercice 11 : Pour chacune des fonctions ci-dessous, vous déterminerez les équations des éventuelles asymptotes.

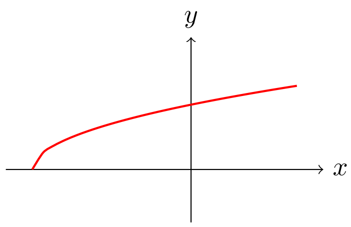
1) $f(x) = \sqrt{x+6}$
2) $l(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{3x+12}$
3) $f(x) = x^2+4$
4) $g(x) = \dfrac{ax^2+b}{cx^2+d}$ avec $a \neq d$
5) $l(x) = \dfrac{a}{bx}$

CORRECTION

1) $f(x) = \sqrt{x+6}$ avec $D_f = [-6; +\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to -6} f(x) = 0 = f(-6)$ donc pas d'asymptote.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Il existe éventuellement une asymptote oblique.

On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. On remarque que $\dfrac{f(x)}{x} \sim_{+\infty} \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Il n'existe pas d'asymptote oblique.



2) $l(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{3x+12}$.
Nous avons déjà calculé les limites aux bornes du domaine de définition de cette fonction (cf. exercice 18 question 3). Avec $D_l =]-\infty; -4[\cup]-4; -3] \cup [3; +\infty[$

- $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} l(x) = \dfrac{1}{3}$ donc asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} l(x) = \dfrac{-1}{3}$ donc asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{-1}{3}$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow-4^-} l(x) = \dfrac{\sqrt{7}}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow-4^+} l(x) = \dfrac{\sqrt{7}}{0^+} = +\infty$ donc asymptote verticale d'équation $x = -4$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow-3^-} l(x) = \dfrac{0^+}{3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow3^+} l(x) = \dfrac{0^+}{21} = +\infty$ donc asymptote verticale d'équation $x = 3$

3) $f(x) = x^2+4$
$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$. On cherche $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, pas d'asymptote oblique. Idem en $-\infty$.

4) $g(x) = \dfrac{ax^2+b}{cx^2+d}$ avec $a \neq d$
$\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty} g(x) = \dfrac{a}{c}$ donc asymptote horizontale en ∞ + asymptote verticale d'équation $x = \dfrac{-d}{c}$.

5) $l(x) = \dfrac{a}{bx}$: asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et verticale d'équation $x = 0$.