Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne — L3 MIASHS
2023/24 — M. Gourdel

Intégration - Probabilités
Examen 2 heures
Seul document autorisé : un aide mémoire manuscrit recto-verso A4
Appareils électroniques interdits

EXERCICE 1 *(5 points[1])*

On va noter $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par la partition $\{[n, n+1[\mid n \in \mathbb{Z}\}$.

On dira dans cet exercice qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{A}$-mesurable si $f \in \mathcal{L}^0((\mathbb{R}, \mathcal{A}), (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})))$ et qu'elle est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable si $f \in \mathcal{L}^0((\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})))$.

1. *Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{A}$-mesurable, alors f est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable.*
2. *Justifier que $]1/2, 1[\notin \mathcal{A}$.*
3. *Montrer qu'il existe une fonction $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable qui n'est pas $\mathcal{A}$-mesurable. On pourra chercher cette fonction sous la forme d'une fonction indicatrice.*
4. *On considère la fonction f_0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_0(x) = Ent(x/2)$ (où Ent désigne la partie entière) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
   a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer $f_0^{-1}(]-\infty, \alpha[)$.
   b) Montrer que f_0 est $\mathcal{A}$-mesurable.

EXERCICE 2 *(3 points)*

1. *Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par*

$$u_n = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{4t^3 - 12}{12t^6 + 3nt + 2} \, d\lambda(t).$$

2. *Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.*

EXERCICE 3 *(4 points)*

Discuter de l'existence puis calculer à l'aide du théorème de Fubini l'intégrale double suivante

$$\int_{[0,1] \times [1,2]} \frac{1}{(2x + 3y)^2} \, d\lambda_2(x, y),$$

où λ_2 désigne la mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle.

1. Barème indicatif

Exercice 4 *(4 points)*

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et* X *une variable aléatoire dont la loi* $\mathbb{P}_X$ *possède une densité par rapport à la mesure de lebesgue qui vaut*

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4t & \text{si } t \in [0, 1/2[\\ 4 - 4t & \text{si } t \in [1/2, 1[\\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

1. *Montrer que* f_X *possède toutes les propriétés d'une densité de probabilité.*
2. *Déterminer la fonction de répartition* F_X.
3. *Montrer que* $\mathbb{P}(X \in]0, 1[) = 1$.
4. *Montrer à l'aide du théorème de convergence dominée que* $\mathbb{E}(X^n) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

Exercice 5 *(4 points)*

Soit F *la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} \, d\lambda(t)$$

1. *Montrer que* F *est bien définie sur* $\mathbb{R}_+^*$.
2. *Soit* $\delta > 0$. *Montrer que* F *est dérivable sur* $]\delta, +\infty[$.
3. *Montrer que* F *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et déterminer l'expression de la dérivée.*
4. *Montrer que* F *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

FIN