Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne — L3 MIASHS
2023/24 — M. Gourdel

Intégration - Probabilités
Eléments de corrigé

PREUVE DE L'EXERCICE 1

1. On suppose que $f \in \mathcal{L}^0((\mathbb{R},\mathcal{A}),(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ donc pour pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. Or $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et f est mesurable au sens de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. On pose $A_0 =]1/2, 1[$, puisque $\mathcal{A}$ est une tribu engendrée par une partition dénombrable, on a vu en cours que pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \in \mathcal{A}$ si et seulement si il existe une partie $I \subset \mathbb{Z}$ telle que $A = \cup_{n\in I}[n, n+1[$.

   Par l'absurde, on va supposer que $A_0 = \cup_{n\in I}[n, n+1[$. Dans ce cas de figure,
   $$A \cap \mathbb{Z} = (\cup_{n\in I}[n, n+1[) \cap \mathbb{Z} = (\cup_{n\in I}\{n\}) \cap \mathbb{Z} = I.$$
   Mais puisque $]1/2, 1[\cap \mathbb{Z} = \emptyset$, cet intervalle ne peut appartenir à $\mathcal{A}$ puisque I serait vide.

   Argument alternatif : Par l'absurde, on va supposer que $A_0 = \cup_{n\in I}[n, n+1[$. Puisque les ensembles $[n, n+1[$ sont en partition, alors
   $$\lambda(A_0) = \sum_{n\in I} \lambda([n, n+1[) = \sum_{n\in I} 1 = \mu_C(I).$$
   Ce qui est absurde car le terme de droite vaut soit $+\infty$ soit un entier.

   Argument alternatif 2 : Par l'absurde, on va supposer que $A_0 = \cup_{n\in I}[n, n+1[$, alors $\partial A \subset \mathbb{Z}$. Mais ici le bord mathématique de A vaut $\{1/2, 1, \} \not\subset \mathbb{Z}$.
3. Si on considère $f = \mathbf{1}_{]1/2,1[}$, la fonction f est mesurable au sens de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ car tous les intervalles sont boréliens mais d'après la question précédente f n'est pas mesurable au sens de $\mathcal{A}$ puisque $]1/2, 1[\notin \mathcal{A}$.
4. a) On considère $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_0^{-1}(]\infty, \alpha[) = \{x \in \mathbb{R} \mid Ent(x/2) < \alpha\}$.

   Si $\alpha = n$ est un entier (relatif), alors on peut écrire
   $$Ent(x/2) < n \Leftrightarrow Ent(x/2) \leq n-1 \Leftrightarrow x/2 < n \Leftrightarrow x < 2n.$$
   Si α n'est pas un entier (relatif) alors il existe un entier n tel que $n < \alpha < n+1$, alors on peut écrire
   $$Ent(x/2) < \alpha \Leftrightarrow Ent(x/2) < n+1 \Leftrightarrow x/2 < n+1 \Leftrightarrow x < 2(n+1).$$
   Donc en résumé, il existe un entier p tel que $f_0^{-1}(]\infty, \alpha[=]-\infty, 2p[$. Et on remarque qu'il s'agit d'un élément de $\mathcal{A}$.

   b) Puisque les boréliens de $\mathbb{R}$ sont engendrés par la famille des intervalles de la forme $]\infty, \alpha[$ et puisque pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_0^{-1}(]\infty, \alpha[) \in \mathcal{A}$, on sait d'après le cours que cela suffit à entraîner la $\mathcal{A}$-mesurabilité de f_0.

Preuve de l'exercice 2

1. Pour un entier n donnée, la fonction considérée est continue donc localement Riemann intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et de plus puisque (avec des notations évidentes) $f_n(t) \sim (1/3)t^{-3}$ au voisinage de $+\infty$, l'intégrable impropre de la fonction positive(La fonction dans l'énoncé est en fait $f_n(t) = \frac{4t^3-12}{12t^6+3nt+2}$), donc elle n'est pas positive sur $\mathbb{R}^+$ en entier, mais le même raisonnement s'applique à $|f_n|$) f_n est une intégrale convergente. D'après le cours, la fonction (positive) f_n est donc Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Dans $\mathbb{R}$, on a

$$u_n = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{4t^3+12}{12t^6+3nt+2}\, d\lambda(t) = \int_0^{+\infty} \frac{4t^3+12}{12t^6+3nt+2}\, dt$$

2. On va appliquer le théorème de convergence dominée. Il faut d'une part déterminer la limite simple de la suite de fonctions. A t fixé,

$$f_n(t) \to_{n\to+\infty} \begin{cases} -6 & \text{si } t=0; \\ 0 & \text{si } t>0. \end{cases}$$

En particulier la suite $(f_n)_n$ converge presque partout vers la fonction nulle.

Il faut de plus vérifier que la convergence est dominée. Mais si $t \geq 0$,

$$0 \leq f_n(t) := \frac{|4t^3-12|}{12t^6+3nt+2} \leq \frac{4t^3+12}{12t^6+2}.$$

Le terme de droite est intégrable par le même argument que celui utilisé dans la question précédente.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée afin d'établir que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+} 0\, d\lambda(t) = 0.$$

Preuve de l'exercice 3

On peut commencer par remarquer que cette intégrale existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ car la fonction est positive et mesurable (car continue). De plus, elle existe aussi au sens de $\mathbb{R}$ car si $(x,y) \in [0,1]\times[1,2]$,

$$(2x+3y)^2 \geq 3 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{(2x+3y)^2} \leq \frac{1}{3}.$$

Donc la fonction est intégrable puisque bornée sur un domaine de surface borné.

En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, on peut écrire

$$\int_{[0,1]\times[1,2]} \frac{1}{(2x+3y)^2}\, d\lambda_2(x,y) = \int_{[0,1]} \left(\int_{[1,2]} \frac{1}{(2x+3y)^2}\, d\lambda(y) \right) d\lambda(x).$$

Il faut donc calculer $\int_{[1,2]} \frac{1}{(2x+3y)^2}\, d\lambda(y)$. En utilisant la continuité de la fonction, on sait qu'elle est Riemann intégrable et donc on peut remplacer par une intégrale usuelle, on raisonne à x fixé.

$$\int_{[1,2]} \frac{1}{(2x+3y)^2}\, d\lambda(y) = \int_1^2 \frac{1}{(2x+3y)^2}\, dy.$$

$$= \frac{-1}{3}\int_1^2 -\frac{3}{(2x+3y)^2}\,dy.$$
$$= \frac{-1}{3}\left[\frac{1}{2x+3y}\right]_1^2$$
$$= \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{2x+6}-\frac{1}{2x+3}\right)$$

Puis de la même manière,

$$\int_{[0,1]} \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{2x+6}-\frac{1}{2x+3}\right) d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{2x+6}-\frac{1}{2x+3}\right) dx$$
$$= \frac{-1}{3}\int_0^1 \frac{1}{2x+6}\,dx + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{2x+3}\,dx$$
$$= \frac{-1}{3}\left(\left[\frac{1}{2}\ln(2x+6)\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}\ln(2x+3)\right]_0^1\right)$$
$$= \frac{-1}{6}(\ln(8)-\ln(6)-\ln(5)+\ln(3))$$
$$= \frac{1}{6}\left(\ln(30)-\ln(16)\right) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{30}{24}\right) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

Preuve de l'exercice 4

1. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, mesurable sur $\mathbb{R}$ (conséquence triviale du lemme de recollement) et son intégrale vaut 1.
2. Cette question est très importante et a été très mal réussie, **on va détailler ici sa solution de manière un peu excessive**. Il suffit d'appliquer la définition, en distinguant suivant la position de t. Puisque $F_X(t) = \mathbb{P}_X(]-\infty,t]) = \int_{]-\infty,t]} f_X(s)\,d\lambda(s)$,
   - Si $t=0$ $F_X = \int_{]-\infty,0]} 0\,d\lambda(s) = 0$.
   - Si $t>0$ $F_X = \int_{]-\infty,t]} 0\,d\lambda(s) = 0$.
   - Si $t \in \ [0,1/2[$, en utilisant, la propriété qui généralise la relation de Chasles,

   $$F_X(t) = \int_{]-\infty,t]} f_X(s)\,d\lambda(s) = \int_{]-\infty,0]\sqcup]0,t]} f_X(s)\,d\lambda(s)$$
   $$= F_X(0) + \int_{]0,t]} f_X(s)\,d\lambda(s)$$

   Mais puisque les singletons sont de mesure de Lebesgue nulle, on peut écrire

   $$= \int_{]0,t[} f_X(s)\,d\lambda(s) = \int_{[0,t]} f_X(s)\,d\lambda(s).$$

   Et finalement, on peut remplacer l'intégrale au sens de Lebesgue par l'intégrale au sens de Riemann

   $$= \int_{]0,t[} 4s\,d\lambda(s) = \int_0^t 4s\,ds = 2t^2.$$

   Pour finir, on sait que si X est une variable aléatoire continue (qui possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue), elle est diffuse (F_X est continue). Donc $F_X(0)=0$.

- Si $t 1/2$, de la même façon,

$$F_X(1/2) = \int_{]-\infty,1/2]} f_X(s)\,d\lambda(s) = \int_{0,1/2]} f_X(s)\,d\lambda(s) = \int_0^{1/2} f_X(s)\,ds$$

$$= \int_0^{1/2} 4t\,ds = [2t^2]_0^{1/2} = 1/2.$$

- De la même façon, si $t \in [1/2, 1[$, puisque

$$F_X(t) = \int_{]-\infty,t]} f_X(s)\,d\lambda(s) = \int_{]-\infty,1/2]\sqcup]1/2,t]} f_X(s)\,d\lambda(s)$$

$$= F_X(1/2) + \int_{]1/2,t]} f_X(s)\,d\lambda(s)$$

$$= F_X(1/2) + \int_{[1/2,t]} f_X(s)\,d\lambda(s)$$

$$= F_X(1/2) + \int_{1/2}^{t} 4 - 4s\,ds$$

$$= F_X(1/2) + [4s - 2s^2]_{1/2}^{t}.$$

  Or $F_X(1/2) = 1/2$. Donc, après simplification $F_X(t) = 4t - 2t^2 - 1$.
- Si $t = 1$,

$$F_X(t) = \int_{]-\infty,1]} f_X(s)\,d\lambda(s) = F_X(1/2) + \int_{]1/2,1]} f_X(s)\,d\lambda(s)$$

$$= F_X(1/2) + \int_{1/2}^{1} 4 - 4s\,ds$$

$$= F_X(1/2) + [4s - 2s^2]_{1/2}^{1}.$$

  Or $F_X(1/2) = 1/2$. Donc, après simplification $F_X(1) = 1$.
- Si $t \geq 1$, on remarque de même que

$$F_X(t) = F_X(1) + \int_{]1,t]} f_X(s)\,d\lambda(s) =$$

$$= F_X(1) + \int_{[1,t]} f_X(s)\,d\lambda(s)$$

$$= 1 + \int_1^t 0\,ds = 1.$$

En résumé, on a

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2t^2 & \text{si } t \in [0, 1/2[\\ 4t - 2t^2 - 1 & \text{si } t \in [1/2, 1[\\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Il s'agi contrairement à nombre de copies d'une fonction continue (car la loi possède une densité, la variable aléatoire X est diffuse), croissante.

3. Par définition, $\mathbb{P}(X \in]0,1[) = \mathbb{P}_X(]0,1[) = \int_{]0,1[} f_X(t)\, d\lambda(t)$.
   Mais puisque les singletons sont de mesure de Lebesgue nulle
$$\mathbb{P}_X(]0,1[) = \int_{]0,1[} f_X(t)\, d\lambda(t) = \int_{]0,1]} f_X(t)\, d\lambda(t) = F_X(1) - F_X(0) = 1 - 0 = 1.$$
   On rappelle que dans le cas général
$$\mathbb{P}_X(]0,1[) = \mathbb{P}_X(]0,1]) - \mathbb{P}_X(\{1\}) = F_X(1) - F_X(0) - \mathbb{P}_X(\{1\}).$$
4. Puisque $\mathbb{P}$-presque surement $X(\omega) \in]0,1[$, $X^n(\omega) \to 0$. Or ($\mathbb{P}$-presque surement) la suite X^n est dominée par la fonction constante $\mathbf{1}$ qui est $\mathbb{P}$-intégrable sur Ω. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir que $\mathbb{E}(X^n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
   On peut aussi écrire en utilisant le théorème de transfert :
$$\mathbb{E}(X^n) := \int_\Omega X^n(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} x^n f_X(x)\, d\lambda(x) \to 0.$$

<u>Preuve de l'exercice</u> 5

1. On commence par remarque en posant $h(x,t) = \frac{\sin t}{t} e^{-xt}$ que $|h(x,t)| \le e^{-xt}$. Donc si $x > 0$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. On pose $I =]\delta, +\infty[$. On veut appliquer la version globale du théorème de dérivation sous le signe somme dont les conditions sont
   (i) $\exists x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto h(x_0,t)$ est intégrable.
   (ii) pour presque tout t, $x \mapsto h(x,t)$ est dérivable sur I.
   (iii) $\forall t$, $\forall x \in I$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \le g(t)$ avec g intégrable.
   Or on remarque que
   (i) déjà fait, ici n'importe quel x_0 convient, pour tout $x_0 > 0$, $t \mapsto h(x_0,t)$ est intégrable (voir question a).
   (ii) pour tout t, $x \mapsto h(x,t)$ est trivialement dérivable sur I et que $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -(\sin t)e^{-xt}$.
   (iii) $\forall t$, $\forall x > \delta$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \le e^{-\delta t}$ que l'on va appeler $g(t)$ or g est intégrable.
   On en déduit que F est dérivable sur I et que
$$F'(x) = \int_{\mathbb{R}_+} -(\sin t)e^{-xt}\, d\lambda(t).$$
3. Puisque la fonction est dérivable sur $]\delta, +\infty[$ pour tout $\delta > 0$, F est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Là encore, pour tout $\delta > 0$, on a les hypothèses de continuité sur $]\delta, +\infty[$ sous le signe intégrale :
   (i) $\forall x > \delta$, $t \mapsto (\sin t)e^{-xt}$ est mesurable,
   (ii) pour tout t, $x \mapsto (\sin t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$,
   (iii) $\forall x > \delta$, $|(\sin t)e^{-xt}| \le e^{-tx} \le g(t)$ or g définie plus haut est intégrable.
   La fonction F' est donc continue sur $]\delta, +\infty[$, c'est-à-dire F est donc de classe C^1 sur $]\delta, +\infty[$, et puisque le résultat est vrai pour tout $\delta > 0$, F est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.