Planning prévisionnel pour la fin du semestre.

	CM	DE
semaine du 11 mars	dérivation 2	CC1
semaine du 18 mars	log/exp	dérivation
semaine du 25 mars	log/exp	dérivation
semaine du 02 avril	log/exp/intégration	log/exp
semaine de vacances		
semaine du 15 avril	intégration	log/exp
semaine du 22 avril	intégration/DL	CC2
semaine du 29 avril	DL+exos DL	intégration

Avec ce nouveau planning, nous corrigerons les exercices sur les DL pendant le CM.

Semaine du 11 mars : Dérivées

Contrôle Continu 1

Semaines du 18 et 25 mars : Dérivées

Nous avions prévu de faire deux séances de DE sur la dérivation. C'est toujours le cas. Des exercices supplémentaires ont été ajoutés au besoin.

Ces exercices étaient prévus la semaine du 11 mars.

Exercice 1 Calculer les fonctions dérivées première et seconde des fonctions suivantes. Pour la fonction $m(x)$, calculer les dérivées première et seconde pour k quelconque puis appliquer au cas où $k = \frac{1}{2}$ et $k = 3$.

1) $f(x) = kx^3$, $k \in \mathbb{R}$
2) $g(x) = (3x+4) \times (5x-1)$
3) $h(x) = \dfrac{6x-5}{4x+3}$
4) $m(x) = (3x+4)^k$.

Exercice 2 Déterminer l'équation des tangentes au point considéré pour les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ en $x = 2$
2) $g(x) = \sqrt{2x-1}$ en $x = 2$ et en $x = \dfrac{1}{2}$

Exercice 3 Calculs d'élasticités.

1) Calculer l'élasticité de la fonction $f(x) = kx^\alpha$ où $\alpha > 0$ et $k \in \mathbb{R}$
2) Donner l'élasticité du produit $f(x) \times g(x)$ et celle du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en fonction des élasticités de f et g. Commenter.

Exercice 4 Calculer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes :

1) $f(x;y) = x^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{2}}$
2) $f(x;y) = x^{\frac{-1}{4}} \times y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{3}} + 4$
3) $f(x;y) = x^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{5}} + 2y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{3}}$

Ces exercices étaient prévus la semaine du 18 mars.

Exercice 1 Pour chacune des fonctions ci-dessous, vous déterminerez son sens de variation, les éventuels points candidats à un extremum local et la nature des points candidats s'ils existent. Vous déterminerez les intervalles de convexité/concavité et les éventuels points d'inflexion. Enfin, vous dresserez le tableau de variation.

1) $g(x) = 1 + \sqrt{x^2-1}$
2) $f(x) = x^2 - \dfrac{4}{x}$
3) $h_k(x) = kx^3$, $k \in \mathbb{R}$
4) $m(x) = x^4 - 2x^2 + 20$ définie sur $[-2\ ;2]$
5) $C(q) = q + \dfrac{q^2}{2}$ où $C(q)$ désigne le coût minimum pour produire la quantité q d'output.

Exercice 2 Soit $\Pi(q) = p \times q - C(q)$ où $C(q)$ renvoie à la fonction 5) de l'exercice 1. Discuter la présence d'extremum locaux selon la ou les valeur(s) du paramètre p (qui désigne le prix de l'output).

Exercice 3 Exercice de synthèse : Étude de fonction à une variable réelle (Sujet de partiel de juin 2023)

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{-x^2-2x-2}{x+1}$.

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f(·).
2) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition. *Pour lever les indéterminations à l'infini, vous utiliserez 2 méthodes différentes.*

3) Quels sont les points candidats à un extremum local.
4) Sur quel(s) intervalle(s) la fonction est croissante ? Sur quel(s) intervalle(s) est décroissante ?
5) Déterminer l'équations des tangentes au graphe de $f(x)$ aux points d'abscisse $x = -2$ et $x = 1$. Expliquez pourquoi l'une de ces tangentes est horizontale.
6) Sur quel(s) intervalle(s) la fonction est-elle convexe ? Sur quel(s) intervalle(s) est-elle concave ? La fonction admet-elle un ou plusieurs point(s) d'inflexion.
7) Déterminer la nature des points candidats à un extremum local identifiés question 3.
8) Calculer la valeur que prend la fonction aux points candidats à un extremum local identifiés question 3.
9) A partir des informations précédentes, établir le tableau de variation complet de la fonction sur son domaine de définition.
10) La fonction admet-elle un maximum global ? Un minimum global ? Justifier.
11) Esquisser la représentation graphique de la fonction f(x) sur son domaine de définition.

Exercice 4 Soit la fonction de production de type Cobb-Douglas $Y = f(L;K) = L^{\frac{1}{4}} \times K^{\frac{1}{3}}$ où L la quantité de travail et K la quantité de capital afin de produire Y unité(s) d'output.

1) Déterminer l'équation d'une courbe d'isoquante quelconque.
2) Démontrer que cette isoquante est continue, décroissante, convexe et asymptote aux axes.
3) Calculer les dérivées partielles premières (productivités marginales du travail et du capital) de la fonction f.
4) Montrer que l'on peut écrire $f'_L(L, K)$ sous la forme $\dfrac{\alpha Y}{L}$, et préciser la valeur de α.
5) Montrer que l'on peut écrire $f'_K(L, K)$ sous la forme $\dfrac{\beta Y}{K}$, et préciser la valeur de β.
6) En déduire l'élasticité de la production par rapport à chacun des facteurs.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 Calculer les fonctions dérivées première et seconde des fonctions suivantes.

1) $g_k(x) = \sqrt{x^2 - k}$, $k \in \mathbb{R}$
2) $r_k(x) = (3x + k)^n$, $k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2 soit $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x-3}$.
Questions identiques à l'exercice 3 de l'ancienne semaine du 18 mars. A adapter pour la question 5 pour la détermination des équations des tangentes.

Exercice 3 Refaire l'exercice 4 de l'ancienne semaine du 18 mars avec une fonction Cobb-Douglas : $Y = f(L;K) = L^{\beta} \times K^{\alpha}$ avec $\beta > 0$ et $\alpha > 0$.

Semaines du 02 avril et du 15 avril : Fonctions exponentielles et logarithme népérien

Exercice 1 Pour chacune des fonctions ci-dessous, préciser sur quel ensemble leur fonction réciproque existe puis déterminer leur fonction réciproque en spécifiant le domaine de définition et l'ensemble des images.

1) $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

2) $h(x) = \sqrt{x-4}$

Exercice 2 Résoudre les équations suivantes :

1) $3\ln(x) + 8 = 14$
2) $-3\ln(x) + 8 = 14$
3) $\ln(x+4)^3 = 3$
4) $\ln(2-2x) = 1$
5) $4e^x = 8$
6) $4e^x = -8$
7) $\ln(5-x^2) - \ln(x-1) = 0$
8) $e^{2x-3} = e^{x+1}$
9) $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$
10) $e^{4x-1} \geq 1$

Exercice 3 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x \times \ln(x-4))$
2) $\lim\limits_{x\to4^+} (2x \times \ln(x-4))$
3) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{x}\right)$
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{\ln(x)+3}{\ln(x)+1}\right)$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - x^2\right)$
6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1-\ln x}{e^x - x^2}\right)$

Exercice 4 Montrer que les équivalents suivants sont corrects :

1) $\ln(1+x) \sim_0 x$
2) $e^x \sim_0 x+1$

Exercice 5 Soit $f(x)$ la fonction définie par $f(x) = e^{2x-k}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.

1) Déterminer son domaine de définition.
2) Déterminer le(s) point(s) candidat(s) à un extremum.
3) Déterminer leur nature. Ainsi, que les intervalles de concavité.
4) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition et les équations des éventuelles asymptotes.
5) Dresser le tableau de variation.

Exercice 6 Soit $g(x)$ la fonction définie par $g(x) = \ln(2x+k)$ avec $k > 0$.

1) Déterminer son domaine de définition.
2) Déterminer le(s) point(s) candidat(s) à un extremum.
3) Déterminer leur nature. Ainsi, que les intervalles de concavité.
4) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition et les équations des éventuelles asymptotes.
5) Dresser le tableau de variation.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 Résoudre les équations suivantes :

1) $4e^{3x-1,5} = 360$
2) $\ln(2x^2 + x - 2) = 0$
3) $\ln(4 - x) - \ln(x^2) = \ln 1$
4) $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \dfrac{1}{2}\ln(x)$
5) $\ln\left(\dfrac{x^3}{4}\right) - \ln(x) = 2\ln(x)$

Exercice 2 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x^4+2)}{x^2}\right)$
2) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{\ln(x^4+2)}{x^2}\right)$
3) $\lim\limits_{x\to 0-}\left(\dfrac{\ln(x^4+2)}{x^2}\right)$

Exercice 3 Déterminer les fonctions dérivées première et seconde des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln(x+1)$
2) $g(x) = \ln(x^2)$
3) $f_k(x) = e^{(kx+k)}$ avec $k \in \mathbb{R}$
4) $g_k(x) = kxe^{kx}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exercice 4 Soit la fonction $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

1) Déterminer le domaine de définition.
2) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition.
3) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes.
4) Étudier le sens de variation de la fonction. Préciser les coordonnées des éventuels points candidats à un extremum.
5) Déterminer les ensembles de convexité ou concavité de la fonction, la nature du point candidat et les coordonnées des éventuels points d'inflexion.
6) Résumer l'ensemble des informations précédentes dans un tableau de variation puis tracer le graphe de la fonction.

Exercice 5 Soit une fonction à deux variables définie par $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(y)$

1) Déterminer le domaine de définition de $f(x,y)$.
2) Calculer $f(e,e)$.
3) Déterminer l'équation de la courbe de niveau passant par le couple (e,e).
4) Calculer les dérivées partielles premières et secondes.

Exercice 6 Soit une fonction à deux variables définie par $f(x,y) = e^x \times e^y$

1) Déterminer le domaine de définition de $f(x,y)$.
2) Calculer $f(0,0)$.
3) Déterminer l'équation de la courbe de niveau passant par le couple $(0,0)$.
4) Calculer les dérivées partielles premières et secondes.

Semaine du 22 avril : CC2

Semaine du 29 avril : Intégration

Exercice 1 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^3 + 3x + 1$
2) $g(x) = 3\sqrt{x}$
3) $h(x) = \dfrac{3}{(3x-1)}$

Exercice 2 Déterminer LA primitive qui prend pour valeur 2 en $x = 1$ pour la fonction : $f(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$.

Exercice 3 Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^x t^2 \, \mathrm{d}t$

Exercice 4 Soit $f(x) = 4x + 2$.

1) Calculer l' intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{2} (4x+2) \, \mathrm{d}x$
2) Calculer l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses.
3) Calculer la valeur moyenne de la fonction entre -2 et 2.

Exercice 5 En utilisant l'intégration par parties, calculer les primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^2 \times ln(x)$.
2) $g(x) = x \times e^x$
3) $h(x) = x^2 \times e^x$

Exercices supplémentaires

Exercice 1 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1) $h(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}$
2) $f(x) = \ln(x)$

Exercice 2 Même exercice que le 4 avec d'autres bornes et/ou une autre fonction.