Chapitre 3. Théorie des jeux non coopératifs

La théorie des jeux comporte deux branches : jeux coopératifs (exclu ici) et jeux non coopératifs. La différence est dans l'unité d'analyse, i.e. le jugement au nom duquel les décisions sont prises.

- Jeux coopératifs : l'unité est le groupe (que ce soit la société tout entière ou une partie, coalition) qui cherche le plus grand gain (le contenu du gain est à préciser, il n'est pas forcément monétaire)
- Jeux non coop : l'unité d'analyse est le joueur qui maximise son gain. Dans un jeu non coopératif, un agent peut avoir un comportement dit 'coopératif' (i.e. allant dans l'intérêt du groupe) mais seulement s'il se trouve que son intérêt individuel se trouve maximisé lorsque l'intérêt du groupe est maximisé, i.e. si son comportement a priori non coopératif choisit une action qui va de fait dans le sens du gain du groupe. Le cadre est non coopératif même si la solution peut être coopérative.

I. Définition et règles

Deux manières de représenter un jeu : forme stratégique ou normale = tableau / forme extensive = arbre. La 2^{nde} représentation est toujours possible mais surtout utile pour les jeux séquentiels (à plusieurs étapes successives). On étudie ici les jeux à un coup (= à 1 étape) donc *forme normale ou stratégique*.

Jeu défini par 4 éléments :

- Liste des joueurs (n, $n \geq 2$) (dans les premiers exemples ci-dessous, $n = 2$)
- Pour chacun, son ensemble de stratégies : ensemble discret (2 choix) ou continu (infinité de choix)
- Pour chaque n-uplet de stratégies, les gains associés pour chaque joueur.
- Règles du jeu. Ici, jeux non coop, à 1 étape (= non séquentiel, non répété, à choix simultanés, donc dans l'ignorance *a priori* du choix de l'autre).

Chacun décide dans le but de maximiser son gain, mais sur la base d'informations qui ne le concernent pas seulement : informations sur les autres joueurs (leur nombre, leurs stratégies, leurs gains) et anticipations sur le comportement des autres.

A partir de ces éléments, on a des concepts de solutions de jeux : des cas les plus simples (équilibre en stratégies dominantes) aux plus élaborés (équilibre de Nash).

II. Stratégies discrètes. Equilibre en stratégies dominantes

1. Lecture du tableau

Jeu 1

	b_1	b_2
a_1	(2 , 2)	(1, 3)
a_2	(3, -1)	(0, 0)
a_3	(4, 3)	(2, 4)

2 joueurs : *A* et *B* ;

Ensemble de stratégies de *A* = {a_1, a_2, a_3} ; ensemble de stratégies de *B* = {b_1, b_2}

Gains indiqués dans le tableau : (1,3) se lit : « si *A* choisit a_1 et *B* choisit b_2, le gain de *A* est 1, celui de *B* est 3.

2. Détermination des stratégies dominantes

Jeu 1

	b_1	b_2
a_1	(2 , 2)	(1, 3)
a_2	(3, -1)	(0, 0)
a_3	(4, 3)	(2, 4)

Si *A* choisit a_1, il obtient soit 2 (si *B* choisit b_1), soit 1 (si *B* choisit b_2).

Si *A* choisit a_2, il obtient soit 3 (si *B* choisit b_1), soit 0 (si *B* choisit b_2).

Si *A* choisit a_3, il obtient soit 4 (si *B* choisit b_1), soit 2 (si *B* choisit b_2).

Quel que soit le choix de B, a_3 procure à A un gain strictement supérieur à celui que procurent a_1 et a_2 : a_3 est une stratégie strictement dominante.

Une stratégie strictement dominante pour un agent est telle que, quel que soit le choix de l'autre, elle lui procure toujours un gain strictement supérieur à celui que lui procurerait n'importe laquelle des autres stratégies dont il dispose.

Maximiser son gain conduit A à choisir a_3.

De même

Si *B* choisit b_1, il obtient 2 (si *A* choisit a_1), -1 (si *A* choisit a_2) ou 3 (si *A* choisit a_3)

Si *B* choisit b_2, il obtient 3 (si *A* choisit a_1), 0 (si *A* choisit a_2) ou 4 (si *A* choisit a_3)

Donc quel que soit le choix de A, b_2 lui procure un gain supérieur à celui que procure b_1 : b_2 est une stratégie dominante.

3. Equilibre et optimalité

Ce jeu a un équilibre en stratégies dominantes : (a_3, b_2). La max° du gain par chaque joueur suffit à quiconque pour prédire l'issue du jeu.

L'équilibre en stratégies dominantes ici est un optimum de Pareto (OP), car on ne peut améliorer la situation d'aucun agent sans détériorer celle de l'autre : on ne peut améliorer la situation de A qu'au détriment de B et on ne peut pas améliorer la situation de B.

Il y a deux OP dans ce jeu : (a_3, b_1) et (a_3, b_2) et l'équilibre en stratégies dominantes en est un.

Jeu 1

	b_1	b_2
a_1	(2 , 2)	(1, 3)
a_2	(3, -1)	(0, 0)
a_3	(4,3) OP	(2,4) OP

Un changement minimal sur les gains de B, comme dans le jeu 1 bis, rend l'équilibre sous-optimal, car dominé par (a_2, b_1) :

Jeu 1 bis

	b_1	b_2
a_1	(2 , 2)	(1, 3)
a_2	(3,5) OP	(0,6) OP
a_3	(4,3) OP	(2,4)

Le jeu 1 bis a 3 OP : (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1).

La stratégie dominante de A reste a_3, celle de B reste b_2, il reste donc un équilibre en stratégies dominantes, (a_3, b_2), mais il n'est plus un OP puisqu'il est dominé par (a_2, b_1).

Pourtant, il n'y a aucune chance que les joueurs choisissent (a_2, b_1) de manière non coopérative : le jeu non coopératif les fait choisir une issue collectivement irrationnelle : il serait dans l'intérêt des deux agents de se coordonner sur (a_2, b_1) mais la recherche du gain dans un jeu non coop leur fait manquer cet intérêt commun. C'est un ***paradoxe de la rationalité***. Des agents choisissent rationnellement une solution collectivement irrationnelle. L'exemple type est le dilemme du prisonnier, l'équilibre en stratégies dominantes n'est pas un OP. cf. exo 1 dossier 4.

Remarque : on a beaucoup dit que les économistes (i.e. Smith, Arrow et Hahn) avaient 'cru' à la main invisible' et que le dilemme du prisonnier (plus généralement les équilibres en stratégies dominantes sous-optimaux) montre que ça ne fonctionne pas. On n'a pas attendu le dilemme du prisonnier (assez simple) pour avoir idée des difficultés à faire coïncider rationalité individuelle et rationalité collective. Les conditions concurrentielles disent la difficulté de garantir la compatibilité entre rationalités, individuelle et collective.

III. Stratégies discrètes. Elimination itérative des stratégies dominées

Jeu 2

	b_1	b_2
a_1	(3 , 6)	(7, 1)
a_2	(5, 1)	(8, 2)
a_3	(6, 0)	(6, 2)

Première étape (fictive = étape dans le raisonnement)

Pas de stratégie dominante pour A, ni pour B.

Raisonnement par étapes : élimination successive des stratégies dominées = stratégies qui ne sont jamais choisies par un agent car conduisent, quel que soit le choix de l'autre agent, à un gain moindre qu'une des autres stratégies.

Pour *A*, a_1 est strictement dominée par a_2 : A ne choisit jamais a_1.

Deuxième étape (fictive)

B a toutes les infos sur le jeu. Il sait *A* rationnel, il sait que a_1 est exclu par *A,* il exclut donc les issues (a_1,b_1) et (a_1, b_2).

Jeu 2

	b_1	b_2
$\cancel{a_1}$	~~(3 , 6)~~	~~(7, 1)~~
a_2	(5, 1)	(8, 2)
a_3	(6, 0)	(6, 2)

Alors, b_2 devient dominante (et b_1 dominée).

<u>Troisième étape</u> (fictive)

A sait que *B* est rationnel et que *B* sait que lui-même (*A*) est rationnel. Il prévoit que B ne peut choisir b_1. A choisit a_2. La solution est (a_2, b_2)

Jeu 2

	~~b_1~~	b_2
~~a_1~~	~~(3 , 6)~~	~~(7, 1)~~
a_2	~~(5, 1)~~	(8, 2)
a_3	~~(6, 0)~~	(6, 2)

A choisit a_2.

La solution est (a_2, b_2)

Jeu 2

	~~b_1~~	b_2
~~a_1~~	~~(3 , 6)~~	~~(7, 1)~~
a_2	~~(5, 1)~~	(8, 2)
~~a_3~~	~~(6, 0)~~	~~(6, 2)~~

Pour déterminer un équilibre de ce type (par élimination itérative des stratégies dominées), on doit supposer non seulement que les agents sont rationnels mais que chacun sait que les autres le sont, et que les autres savent que chacun l'est etc. ***La rationalité est connaissance commune***. Ce qui permet de prévoir ce que seront, ou ne seront pas, les choix de l'autre même si les choix sont simultanés donc dans l'ignorance des choix réellement faits par l'autre.

Remarque : la rationalité connaissance commune ne va pas de soi. Un agent peut avoir intérêt à faire croire qu'il est irrationnel (dissuasion nucléaire, comportements capricieux).

Ici, l'équilibre par élimination des stratégies dominées est l'un des deux OP (l'autre OP est (a_1 ,b_1) mais ce n'est pas systématique (cf. exo 3 dossier 4).

Les deux concepts de solution vus précédemment (équilibre en stratégie dominante, équilibre par élimination des stratégies dominées) semblent assez évidents ou intuitifs.

Mais le plus souvent, les jeux ne comportent pas d'équilibre des types qui précèdent. D'où le concept d'équilibre de Nash.

IV. Equilibre de Nash (NE)

Jeu 3

	b_1	b_2	b_3
a_1	(6 , 7)	(2 , 2)	(7 , 8)
a_2	(2 , 3)	(3 , 4)	(- 8 , 3)
a_3	(4 , 10)	(2 , 1)	(8 , 9)

1. Fonctions de meilleure réponse

On décrit les comportements rationnels par les fonctions de meilleure réponse

Fonction de meilleure réponse de A

Si A pense que B choisit b_1, A choisit a_1.

Si A pense que B choisit b_2, A choisit a_2.

Si A pense que B choisit b_3, A choisit a_3.

A ne peut que 'penser', 'imaginer', 'anticiper', mais ni observer ni prévoir ce que sera le choix de l'autre. En effet, le jeu est à un coup, les choix sont simultanés donc chaque choix est fait dans l'ignorance du choix de l'autre. Si aucun élément (de type stratégie dominante ou stratégie dominée) ne permet de prévoir le choix de l'autre, l'anticipation du choix de l'autre est aléatoire, sans fondement.

Fonction de meilleure réponse de B

Si B pense que A choisit a_1, B choisit b_3.

Si pense que A choisit a_2, B choisit b_2.

Si pense que A choisit a_3, B choisit b_1.

Rien ne permet d'élire une issue (i.e. un couple de stratégies qui seraient choisies) plutôt qu'une autre, comme on le faisait dans les jeux 1 et 2. L'hypothèse de rationalité, comme norme de comportement pour le théoricien et pour les joueurs ne suffit pas à prédire l'issue de ce jeu. Toutes les issues sont également possibles.

Les issues possibles dépendent *a priori* :

- des anticipations (sans fondement rationnel) des agents sur le choix de l'autre.

- du comportement face au risque : A (respectivement B) peut préférer tenter l'issue qui peut lui procurer le gain le plus élevé (a_3) ou minimiser le risque de perte (pas a_2).

On a toutefois établi la fonction de meilleure réponse de *A* aux choix de *B*, et réciproquement (même si ces fonctions ne sont pas observées puisqu'on observe seulement des choix).

2. Equilibre et optimalité

Equilibre de Nash (NE) = point fixe : un NE est un couple de stratégies (a_i , b_j) tel que

a_i = MR $_A$ (b_j) et b_j = MR $_B$ (a_i)

Dans le jeu 3, il existe un NE unique : (a_2, b_2).

MR $_A$ (b_1) = a_1.

MR $_A$ (b_2) = a_2.

MR $_A$ (b_3) = a_3.

MR $_B$ (a_1) = b_3.

MR $_B$ (a_2) = b_2.

MR $_B$ (a_3) = b_1.

Optimalité

Jeu 3

	b_1	b_2	b_3
a_1	(6 , 7)	(2 , 2)	(7 , 8)
a_2	(2 , 3)	(3 , 4)	(- 8 , 3)
a_3	(4 , 10) OP	(2 , 1)	(8 , 9) OP

L'équilibre unique (a_2, b_2) est sous-optimal, dominé par (a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_3, b_1) et (a_3, b_3). Le jeu contient deux OP : (a_3, b_1) et (a_3, b_3).

Remarque. Les NE forment un ensemble plus large d'équilibres que les équilibres en stratégies dominantes ou par élimination des stratégies dominées, mais l'ensemble des NE inclut l'ensemble des équilibres en stratégies dominantes et l'ensemble des équilibres par élimination des stratégies strictement dominées. A ces équilibres, il en ajoute d'autres.

3. Interprétation de l'équilibre de Nash

Comment advient-il ? non-déviation ou non- regret

Jeu 3

	b_1	b_2	b_3
a_1	(6 , 7)	(2 , 2)	(7 , 8)
a_2	(2 , 3)	(3 , 4)	(- 8 , 3)
a_3	(4 , 10) OP	(2 , 1)	(8 , 9) OP

Deux interprétations de l'équilibre de Nash

- *Interprétation très approximative (incorrecte mais utile parce qu'intuitive)* :
  NE = situation dont aucun agent n'a intérêt à dévier *unilatéralement*, i.e. tel qu'aucun agent, considérant le choix de l'autre comme une donnée, ne désire pas changer son propre choix.
  Cette interprétation est utile pour une intuition rapide. On se place sur le tableau et on se demande un agent aurait intérêt à 'dévier', i.e. on se demande, en comparant les gains de A, s'il a intérêt à 'glisser verticalement' ; en comparant les gains de B, s'il a intérêt à 'glisser horizontalement'. Par exemple, dans le jeu 3, (a_1 , b_1) n'est pas un NE parce que B voudrait 'dévier' en (a_1 , b_3), mais celui-là n'est pas un NE car A voudrait 'dévier' en (a_3, b_3), mais c'est encore raté car B voudrait 'dévier' en (a_{13}, b_1), et là A voudrait 'dévier' en (a_1 , b_1). Aucune de ces 4 issues n'est un NE. Vous pouvez vérifier que (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_1 , b_2) et (a_3 , b_2) n'en sont pas non plus.

  Pourtant, cette interprétation est incorrecte parce qu'on étudie des jeux à un coup et choix simultanés. Une fois les choix faits, nul ne peut en dévier d'après les règles : on ne joue qu'une seule fois. L'équilibre de Nash dans un jeu à une étape ne peut pas être le résultat d'un processus. Au mieux, c'est un processus mental comme lorsqu'existe un équilibre par élimination des stratégies dominées, mais pas un processus réel.

  D'ailleurs, même si on concevait le NE comme résultat d'un processus de révision des choix des agents après observation du choix de l'autre, il faudrait faire deux remarques :

  (i) La déviation unilatérale suppose que chaque agent prend le choix de l'autre comme donné, i.e. en supposant qu'il est indépendant du sien. Or les agents voyaient les autres modifier leur choix en observant le leur, leur croyance (le choix de l'autre est indépendant du mien) serait contredite par ce qui est observé (l'autre modifie son choix alors que rien n'a changé pour lui sauf d'observer mon propre choix : c'est donc que son choix dépend du mien !).

(ii) Si les choix sont effectués simultanément mais plusieurs fois, il faut des jeux répétés. Alors, l'ensemble des équilibres d'un jeu répété peut être beaucoup plus large que l'ensemble des équilibres du jeu à un coup… hors programme.

- *Interprétation correcte* : un NE est une situation de non-regret : aucun agent ne regrette son choix, après avoir observé le choix de l'autre. Comme chacun a agi en anticipant le choix de l'autre, l'absence de regret suppose qu'il a correctement anticipé ce choix. Or l'anticipation est formulée au hasard, sans fondement rationnel (elle n'est pas irrationnelle, elle n'est pas rationnelle). L'équilibre de Nash (NE) est donc le résultat des choix rationnels des agents d'une part (chacun maximise son gain, c'est ce qui permet de construire les fonctions de meilleure réponse) et de leurs anticipations sur le choix de l'autre d'autre part (anticipations sans lien avec la rationalité ni avec l'observation). Le NE se réalise si les agents anticipent correctement le choix de l'autre. Les solutions qui ne sont pas des NE ne peuvent arriver que par erreur d'anticipation des agents sur le choix de l'autre. Mais rien ne garantit l'absence d'erreur dans l'anticipation.