Semaines du 18 au 25 mars : Dérivées

Exercice 1) Calculer les fonctions dérivées première et seconde des fonctions suivantes.

$g_k(x) = \sqrt{x^2 - k}$, $k \in \mathbb{R}$
$g_k'(x) = x \times (x^2 - k)^{\frac{-1}{2}}$
$g_k''(x) = (x^2 - k)^{\frac{-1}{2}} - x^2 \times (x^2 - k)^{\frac{-3}{2}}$

$r_k(x) = (3x + k)^n$
$r_k'(x) = 3n \times (3x + k)^{n-1}$
$r_k''(x) = 9n \times (n - 1) \times (3x + k)^{n-2}$

Exercice 2) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x-3}$ avec $D_f =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$.
Rmq : Il est possible, voir souhaitable, de faire figurer les informations ci-dessous dans un tableau de variation.

$f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-7)}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{(x-3)^2}$. Le signe de $f'(x)$ dépend exclusivement du numérateur car $(x-3)^2 > 0$, $\forall x \in D_f$.

x		-1		7	
$x+1$	-	0	+		+
$x-7$	-		-	0	+
x^2-6x-7	+	0	-	0	+

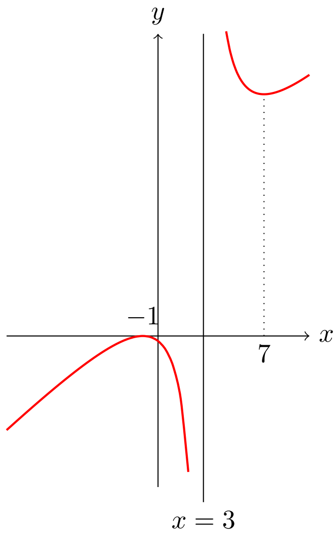
Attention, ne pas oublier le domaine, avant de conclure sur le sens de variation. La fonction est croissante sur $]-\infty; -1[\cup]7; +\infty[$ et elle est décroissante sur $]-1; -3[\cup]-3; 7[$.

La fonction $f(x)$ admet deux points candidats dont les abscisses sont : $x_1 = -1$ et $x_2 = 7$. Pour connaitre leur nature, on calcule la valeur de la dérivée seconde au point candidat.

$f''(x) = \dfrac{(2x-6)(x-3)^2 - 2(x^2-6x-7)(x-3)}{(x-3)^4} = \dfrac{(2x-6)(x-3) - 2(x^2-6x-7)}{(x-3)^3} = \dfrac{32}{(x-3)^3}$.
$f''(-1) = \dfrac{32}{-4^3} < 0$ donc maximum et $f''(7) = \dfrac{32}{4^3} > 0$ donc minimum.

Pour connaître les intervalles de convexité, on étudie le signe de la dérivée seconde. Son signe dépend exclusivement du signe du dénominateur. Soit $(x-3)^3 > 0 \Rightarrow x > 3$ et $(x-3)^3 < 0 \Rightarrow x < 3$. D'où, la fonction est concave quand $x < 3$ et convexe quand $x > 3$.

Afin de spécifier si les extremum sont locaux ou globaux, on calcule les limites en ∞.
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$. Donc le maximum est local.
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$. Donc le minimum est local.



Exercice 3) $Y = f(L; K) = L^{\beta} \times K^{\alpha}$.
cf. document sur la fonction Cobb-Douglas sur l'EPI.